Math. A. 253 f

Elementar-Lehrbuch

der

Mechanik.

Zum

Gebrauch für technische Lehranstalten

und zugleich

als ein Supplement zu den Lehrbüchern der Physik.

Von

W. Whewell,

Professor an der Universität zu Cambridge ꝛc.

Nach der fünften sehr verbesserten und vermehrten Originalauflage aus dem Englischen übersetzt

von

Dr. C. H. Schnuse.

Zweite Ausgabe.

Mit 8 Figurentafeln.

Braunschweig,

Verlag von G. C. E. Meyer sen.

1849.

350. D.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Vorwort des Uebersetzers.

Die Brauchbarkeit des vorliegenden Lehrbuches wird zur Genüge durch die fünf Auflagen, welche das Original in England in kurzer Zeit erlebte, so wie durch den Namen des als gediegener mathematischer Schriftsteller rühmlichst bekannten Verfassers verbürgt. Der Hauptzweck des Verfassers war, die Grundbegriffe der Mechanik nicht blos mit Einfachheit, Strenge und Klarheit vorzutragen, sondern zugleich die Anwendung und Handhabung derselben an einfachen praktischen Beispielen zu zeigen, weil nur auf diese Weise jene theoretischen Grundlehren dem Anfänger zum klaren und bestimmten Bewusstsein gebracht und die Schwierigkeiten beseitigt werden, welche er bei dem Uebergange von der theoretischen Mechanik zur praktischen findet. Das Werk kann da-

her besonders als Lehrbuch für technische Lehranstalten benutzt und zugleich als ein Supplement zu den Lehrbüchern der Physik betrachtet werden. Auch ist hier zu bemerken, dass die zuweilen vorkommenden Maße englische sind.

Inhaltsverzeichniß.

Seite

Einleitung . . . . . 1.

§. 1. Erklärung der Mechanik und der Kräfte. 2. Körper. 3. Gleichgewicht. 4. Kräfte. 5. Gewicht. 6. Quantität der Materie. 7. Eine Kraft kann an einem beliebigen Punkte ihrer Richtung wirken. 8. Oder an einer über eine Rolle gehenden Schnur. 9. Statik und Dynamik. 10. Definition der Kraft in der Statik.

Statik.

Kap. 1. Vom Hebel . . . . . 9.

§. 11. Erklärungen. 12. Gleiche Kräfte an gleichen Hebelarmen halten einander das Gleichgewicht. 13. Der Druck auf den Unterstützungspunkt ist gleich dem ganzen Gewichte. 14. Die Gewichte können als in der Mitte zwischen ihren Angriffspunkten vereinigt gedacht werden. 15. Gewichte, welche sich umgekehrt wie ihre Entfernungen vom Unterstützungspunkte verhalten, halten einander das Gleichgewicht. 16. Dasselbe gilt auch, wenn die Kräfte auf derselben Seite des Unterstützungspunktes liegen. 17. Drei Arten von Hebeln. 18. Beispiele des geradlinigen Hebels. 19. Gebrochener oder Winkelhebel. 20. Unter beliebigen Winkeln gegen den Hebelarm wirkende Kräfte. 21. Beispiele des Winkelhebels. 22. Gleichgewicht einer beliebigen Anzahl am Hebel wirkender Kräfte. 23. Beispiele. 24. Wenn die Hebelarme in verschiedenen Ebenen liegen.

Kap. 2. Von der Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte . . . . . 22.

§. 25. Seitenkräfte und Mittelkraft. 26. Richtung der Mittelkraft. 27. Größe derselben. 28. Dreiecke, deren Seiten sich wie die Kräfte verhalten. 29. Beispiele der Zusammensetzung der Kräfte. 30. Mittelkraft aus einer beliebigen Anzahl von Kräften. 31. Mittelkraft von Kräften, die nicht in derselben Ebene liegen. 32. Aufgaben über das Gleichgewicht.

Kap. 3. Von den mechanischen Potenzen . . . . . 37.

§. 33. Aufzählung der mechanischen Potenzen. Abschnitt 1. Mechanische Potenzen, welche sich auf den Hebel zurückführen lassen. 34. Rad an der Welle. 35. Zahnräder. 36. Rollen. 1) Die einfache bewegliche Rolle. 37. 2) Erstes Rollensystem (Flaschenzug). 36. a. 3) Zweites Rol-

Seite

lenſyſtem. 37. a. 4) Drittes Rollenſyſtem. Abſchnitt 2. Mechaniſche Potenzen, welche ſich auf die Zerlegung der Kräfte zurückführen laſſen. 38. Geneigte Ebene. 39. Keil. 40. Schraube. 41. Verbindung mechaniſcher Potenzen. 42. Mechaniſcher Vortheil einer ſolchen Verbindung. 43. Verbindung von Hebeln. Abſchnitt 3. Allgemeine Eigenſchaft der mechaniſchen Potenzen. 44. Geſchwindigkeit, nach einer gegebenen Richtung gemeſſen. 45. Die Kraft und Laſt verhalten ſich umgekehrt wie ihre Geſchwindigkeiten. 46. Beim Hebel. 47. Beim Rade an der Welle. 48. Bei den Zahnrädern. 49. Bei der einfachen Rolle mit parallelen Schnüren. 50. Mit nicht parallelen Schnüren. 51. Erſtes Rollenſyſtem. 52. Zweites Rollenſyſtem. 53. Drittes Rollenſyſtem. 54. Bei der geneigten Ebene. 55. Beim Keile. 56. Bei der Schraube. 57. Bei einer Maſchinenverbindung.

Kap. 4. Vom Schwerpunkte . . . . . 61.

§. 58. Erklärung des Schwerpunktes. 59. Er liegt in der geraden Linie, um welche der Körper in allen Lagen im Gleichgewichte iſt. 60. Schwerpunkt zweier Körper. 61. Schwerpunkt von Körpern, die in derſelben geraden Linie liegen. 62. Von Körpern, die in derſelben Ebene liegen. 63. Von beliebigen Körpern. 64. Der Effect iſt derſelbe, als wenn die Maſſe des Syſtemes in ſeinem Schwerpunkte vereinigt wäre. 65. Beiſpiele. 1) Gerade Linie. 2) Parallelogramm. 3) Dreieck. 4) Viereck mit gleichen zuſammenſtoßenden Seiten. 5) Trapez. 6) Dreiſeitige Pyramide. 7) Beliebige Pyramide. 8) Abgeſtumpfte Pyramide. 66. Die Summe der Producte aus den materiellen Theilchen und den Quadraten ihrer Entfernung vom Schwerpunkte iſt die möglichſt kleinſte. 67. Im Gleichgewichtszuſtande bewegt ſich der Schwerpunkt weder auf-, noch abwärts.

Kap. 5. Aufgaben über das Gleichgewicht feſter Körper . . . . . 75.

§. 68. Druck auf den Unterſtützungspunkt des Hebels bei zwei Kräften. 69. Für eine beliebige Anzahl von Kräften. 70. Zwei Bedingungen des Gleichgewichtes eines ſtarren Körpers.

1. Gleichgewicht um einen Punkt.

§. 71. Aufgabe 1. Gewöhnliche Wage. Aufgabe 2. Von einem an einem beſtimmten Punkte aufgehangenen Rechtecke ein Dreieck ſo abzuſchneiden, daſſ die untere und obere Seite des erſtern eine horizontale Lage bekommen.

2. Gleichgewicht an zwei Oberflächen.

§. 72. Aufgabe 3. Paraboloid auf einer Horizontalebene. Aufgabe 4. Verbindung eines Kegels und einer Halbkugel. Aufgabe 5. Auf zwei Stützen ruhender Körper. Aufgabe 6. Zu finden, wann ein Körper feſt ſteht, oder umſchlägt.

3. Gleichgewicht an einem Punkte und einer Oberfläche.

§. 73. Aufgabe 7. Gleichgewicht eines Balkens, welcher ſich gegen einen feſten Punkt und eine Verticalebene ſtützt. Aufgabe 8. Wenn ſich derſelbe gegen einen Punkt und eine beliebige Ebene ſtützt.

4. Gleichgewicht an zwei Punkten.

§. 74. Aufgabe 9. Gleichgewicht einer ſchweren in einer Verticalebene lie-

Seite

genden ebenen Figur, welche sich mit zwei einen rechten Winkel mit einander bildenden Seiten gegen zwei feste Punkte stützt.

5. Gleichgewichte an zwei Oberflächen.

§. 75. Aufgabe 10. Gleichgewicht eines Balkens, welcher sich gegen zwei geneigte Ebenen stützt. Aufgabe 11. Gleichgewicht zweier einander berührender Kugeln zwischen zwei geneigten Ebenen. Aufgabe 12. Gleichgewicht eines an zwei Seilen hängenden Balkens. Aufgabe 13. Dieselbe Aufgabe, wenn die Seile über Rollen gehen.

6. Stabiles und labiles Gleichgewicht.

§. 76. Aufgabe 14. Stabiles Gleichgewicht eines Körpers, welcher mit seiner untern sphärischen Oberfläche auf einer Kugel ruht. Aufgabe 15. Stabiles Gleichgewicht eines elliptischen Sphäroides in einer Halbkugel.

7. Gleichgewicht der Dachstühle.

§. 77. Horizontaler Druck eines dreieckigen Dachstuhles. 78. Eines vieleckigen Dachstuhles. 79. Wenn die Gewichte der Balken und der darauf ruhenden Last gegeben sind, ihre Gleichgewichtslagen zu finden. 80. Gleichgewicht eines Dachstuhles von vier gleichen Balken.

8. Gleichgewicht der Gewölbe.

§. 81. Erklärungen. 82. Die Gewichte der Gewölbsteine verhalten sich wie die Tangentenunterschiede der Winkel, welche ihre Fugen mit der Verticale bilden. 83. Horizontaler Druck. 84. Bestimmung des Druckes, welcher die Gewölbpfeiler umzustürzen droht. 85. Linie des Druckes. 85. a. Sie darf nicht außerhalb der Gewölbsteine fallen. 86. Wenn die Intrados ein Kreis ist, die Extrados zu finden. 87. Bedingungen des Gleichgewichtes, wenn der Gewölbbogen horizontal ist. 87. a. Aquilibrirter Gewölbbogen. 87. b. Die Linie des Druckes fällt fast mit der Intrados zusammen. 87. c. Der Gewölbbogen kann durch einen zu starken Druck auf seinen höchsten Punkt zerdrückt werden. 87. d. Einfluss der Cohäsion. 87. e. Das Gleichgewicht ist stabil. 87. f. Versuch.

Kap. 6. Von der Reibung in der Statik . . . . . 111.

§. 88. Reaction glatter Oberflächen. 89. Reibung. 90. Sie hängt von der Masse und dem Gewichte ab. 91. Aber nicht von der Größe der Berührungsfläche. 92. Sie ist dem Drucke proportional.

1. Reibung zwischen endlichen Flächen.

§. 93. Betrag derselben in verschiedenen Fällen. 94. Messungsart derselben. 95. Das Gleichgewicht wird durch die Reibung modificirt. 96. Gleichgeltende Kräfte. 97. Wirkung der Reibung in einem Gewölbbogen.

2. Reibung cylindrischer Oberflächen.

§. 98. Größe derselben in verschiedenen Fällen. 99. Wirkung der Reibung am Hebel.

Dynamik.

Kap. 1. Erklärungen und Grundsätze . . . . . 119.

§. 100. Gegenstand der Dynamik. 101. Druckkraft. 102. Zeit. 103. Ge-

Seite

schwindigkeit. 104. Raum = Geschwindigkeit × Zeit bei der gleichförmigen Bewegung. 105. Veränderliche Geschwindigkeit. 106. Maß derselben. 107. Anderes Maß derselben. 108. $v = \frac{ds}{dt}$. 109. Grundsätze. 110. Erstes Bewegungsgesetz und Beweis desselben. 111. Folgerung daraus. 112. Krummlinige Bewegung. 113. Beschleunigende Kraft. 113. a. Die Schwere ist eine gleichförmige beschleunigende Kraft. 113. b. Maß gleichförmig beschleunigender Kräfte. 114. Geschwindigkeit — Kraft × Zeit. 115. Maß veränderlich beschleunigender Kräfte. 116. Anderes Maß derselben. 117. $f = \frac{dv}{dt}$. 118—119. Zusammensetzung der Geschwindigkeiten. 120. Zweites Bewegungsgesetz. 121. Beweis desselben. 122. Moment bewegender Kräfte. 123.—125. Drittes Bewegungsgesetz. 126. Die beschleunigende Kraft verhält sich direct wie der Druck und umgekehrt wie die Masse. Beispiele. 127. Trägheit. 128. Anstoß. 129. Das dritte Bewegungsgesetz gilt für den Stoß. 130. Die Bewegungsgesetze sind die möglichst infachsten. 131. Erweitertes drittes Bewegungsgesetz. 132. Betrachtungen.

Kap. 2. Gleichförmige Bewegung und Anstoß . . . . . 145.

§. 133. Die Veränderung der Bewegung beim Anstoße wird als augenblicklich erfolgend angenommen. 134. Gerader und schiefer Stoß. 135. Mit gleichen Momenten zusammenstoßende Körper. 136. Die Elasticität ist constant.

1. Gerader Stoß.

§. 137. Zweier unelastischer Körper. 138. Zweier elastischer Körper. 139. Vollkommen elastischer Körper. 140. Durch einen zwischenliegenden Körper mitgetheilte Geschwindigkeit. 141. Grenze der Geschwindigkeit. 142. Bei vollkommen elastischen Körpern wird das Product aus ihren Massen und den Quadraten ihrer Geschwindigkeiten durch den Anstoß nicht geändert. 143. Vergleichung dieses Productes für unvollkommen elastische Körper nach dem Stoße.

2. Schiefer Stoß.

§. 144. Wirksame zerlegte Geschwindigkeiten. 145. Bewegungen nach dem Stoße. 146. Zusammentreffen zweier sich nach derselben geraden Linie bewegender Körper. 147. Dasselbe, wenn sich die Körper nach beliebigen geraden Linien bewegen. 148. Anderer Beweis. 149. Zu bestimmen, wann die Körper einander am nächsten sind. 150. Der Schwerpunkt beider Körper bewegt sich gleichförmig in einer geraden Linie. 151—152. Anderer Beweis desselben Satzes. 153. Die Bewegung des Schwerpunktes wird durch den Anstoß nicht geändert.

3. Stoß gegen Ebenen.

§. 154. Richtung der Zurückwerfung. 155. Das Verhältniss der Massen zweier unvollkommen elastischer Körper so zu bestimmen, dass der eine nach dem Stoße in Ruhe bleibt. 156. Dass beide durch gegebene Punkte gehen. 157. Dasselbe für unvollkommen elastische Körper. 158. Dass vollkommen elastische Kugeln nach der Zurückwerfung durch gegebene Punkte

Seite

gehen. 159. Dasselbe für unvollkommen elastische Kugeln. 160. Dasselbe für eine beliebige Anzahl von Zurückwerfungen.

Kap. 3. Gleichförmig beschleunigte Bewegung und Schwerkraft . . . . 171.

1. Gleichförmig beschleunigte Bewegung.

§. 161. Die Geschwindigkeit ist der Zeit proportional. 162. Der Raum dem Quadrate der Zeit. 163. Mit einer gegebenen Geschwindigkeit nach der Richtung der Kraft geworfener Körper. 164. Nach entgegengesetzter Richtung geworfener Körper.

2. Verticale Bewegung vermöge der Schwerkraft.

§. 165. Die Schwere ist eine gleichförmig beschleunigende Kraft. 166. Sie ist für alle Körper gleich. 167. Beispiele fallender Körper. 168. Ein in einen Brunnen fallender Stein. 169. Bewegung schwerer Körper, die an einer über eine Rolle gehenden Schnur befestigt sind.

3. Bewegung auf geneigten Ebenen.

§. 170. Beschleunigende Kraft. Formeln. 171. Die Fallzeit längs der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen eine Kathete vertical und die andere horizontal liegt, ist gleich der Dauer der Bewegung durch die beiden Katheten, wenn sich die Seiten des Dreieckes wie 3 zu 4 und 5 verhalten etc. 172. Formeln für die Bewegung eines Körpers, welcher von einem andern längs einer schiefen Ebene fortgezogen wird. 173. Die Fallzeiten durch die von dem tiefsten oder höchsten Punkte eines in einer Verticalebene liegenden Kreises ausgezogenen Sehnen sind einander gleich. 174. Die Fallzeiten durch die zwischen zwei Kreisen liegenden Theile der von ihrem höchsten Punkte aus gezogenen Sehnen sind einander gleich.

4. Ebenen des schnellsten nnd langsamsten Falles.

§. 175. Ebene des schnellsten Falles von einem gegebenen Punkte, Linie oder Kreise nach einem andern gegebenen Kreise, Linie oder Punkte. 176. Beweise für die Hauptfälle.

Kap. 4. Wurfbewegungen . . . . . 192.

§. 177. Zweites Bewegungsgesetz. 178 Wurfweite in Bezug auf eine horizontale Ebene. 179. In Bezug auf eine beliebige Ebene. 180. Größte Wurfweite. 181. Formeln, welche die der Geschwindigkeit entsprechende Fallhöhe enthalten. 182. Die beschriebene Curve ist eine Parabel. 183. Gleichung derselben zwischen rechtwinkligen Coordinaten. 184. Winkel, welcher die Curve mit dem Horizonte in einem beliebigen Punkte bildet. 185. Bestimmung der Wurfrichtung, damit der Körper durch einen gegebenen Punkt gehe. 186. Ein gegebenes Paraboloid treffe. 187. Eine gegebene Ebene berühre. 188. Geometrischer Ort der Lage der geworfenen Körper zu derselben Zeit. 189. Geometrischer Ort der Scheitel ihrer Bahnen. 190. Curve, welche alle diese Parabeln umschließt.

Kap. 5. Bewegung auf einer Curve . . . . . 203.

§. 191. Die auf der Curve erlangte Geschwindigkeit ist der durch die entsprechende Fallhöhe erlangten gleich. 192. Fallzeit durch einen Cycloidenbogen. 193. Schwingungszeit eines Pendels, welches in einer Cycloide oder einem Kreisbogen schwingt. 164. Veränderungen der Schwingungsdauer,

Seite

wenn sich die Länge des Pendels etwas ändert. 195. Wenn sich die Intensität der Schwere ändert.

Kap. 6. Bewegung um eine feste Axe. . . . . 213.

§. 196. Neue Bedingung. 197. Mitgetheilte und wirksame bewegende Kräfte. 198. Sie sind einander gleich. 199. D'Alembert's Prinzip. 200. Die wirksame beschleunigende Kraft bei der Bewegung um eine Axe zu finden. 201. Trägheitsmoment. 502. Beschleunigende Kraft der Schwere. 203. Schwingungspunkt. 203. Eigenschaft des Trägheitsmomentes. 205. Der Schwingungs- und Aufhängungspunkt sind reciprok.

Kap. 7. Bewegung von Maschinen . . . . . 225.

Abschnitt 1. Bewegung um eine feste Axe.

§. 206. Bestimmung der beschleunigenden Kraft von Gewichten am Rade an der Welle. 207. Bei einer Verbindung von Rädern an der Welle. 208. Bei der Atwood'schen Maschine. 209. Beim Hebel. 210. Beim Stoße eines sich um eine Axe drehenden Körpers. 211. Ballistisches Pendel.

Abschnitt 2. Bewegung von Körpern, an welchen sich Schnüre auf- und abwickeln.

§. 212. Auf- oder Abwickeln. 213. Wirksame beschleunigende Kräfte. 214. Mit Schnüren entwickelte Cylinder. 215. Desgleichen, wenn die Schnur an einem Ende befestigt ist.

Abschnitt 3. Bewegung von Rollen.

§. 216. Einfache feste Rolle. 217. Einfache bewegliche Rolle. 218. System von Rollen. 219. Eine beliebige Maschine.

Kap. 8. Reibung in Bewegung befindlicher Körper . . . . . 244.

§. 220. Reibung. 221. Gleitende Reibung. 222. Wälzende Reibung. 223. Reibung der Wagenräder. 224. Reibung bei gleichförmiger Bewegung. 225. Zugkraft auf Landstraßen. 226. Die Reibung ist unabhängig von der Geschwindigkeit. 227. Einfluss der Steigungen.

Kap. 9. Messung der Kraft mechanischer Agentien und ihrer Leistung vermittelst Maschinen . . . . . 249.

§. 228. Beispiele. 229. Der ausgeübte Druck ist dem Widerstande gleich. 230. Die Leistung verhält sich zugleich wie der ausgeübte Druck und der beschriebene Raum. 231. Der Effect wird durch eine Maschine nicht geändert. 232. Kraft der Locomotiven. 233. Verhältniss zwischen Druck uud Widerstand in denselben. 234. Effect einer Maschine. 235. Anwendung der vorhergehenden Sätze. 236. Effect der Schwere. 237. Auf geneigten Eisenbahnrampen. 238—239. Hervorgebrachter Effect mit Rücksicht auf die erzeugte Geschwindigkeit. 240. Bewegende Kraft des Wassers. 241. Der Luft. 242. Der elastischen Körper. 243. Des Dampfes. 244—345. Effect der atmosphärischen Maschinen. 246. Der Condensationsmaschinen. 247—248. Der Hochdruckmaschinen. 249. Vergleichung einer Locomotive mit einer atmosphärischen Maschine. 250. Die Geschwindigkeit wird bei Dampfmaschinen durch die Schnelligkeit der Verdampfung bestimmt. 251. Kraft der Menschen. 252. Der Pferde. 253—254. Leistung der in Bewegung befindlichen Thiere. 255—256. Leistung der Dampfmaschine mit der der Thiere verglichen. 257. Effect der Federn. 358. Zur Ueberwindung eines Hindernisses auf einer Landstraße erforderlicher Kraftaufwand.

Seite

259—260. Wirkung des Stoßes auf ein Hinderniss. 261. Erforderlicher Kraftaufwand zur Ueberwindung eines Hindernisses. 262. Auf einer gepflasterten Straße. 263. Einfluss der Federn auf die Erhaltung der Wagen und der Straßen.

Kap. 10. Ueber den Zusammenhang zwischen Druck und Stoß . . . . . 278.

Einleitung.

§. 1. **Die Mechanik** ist die Wissenschaft, welche sich mit den Gesetzen der Bewegung und der Ruhe der Körper beschäftigt.

In den mechanischen Wissenschaften, wie in jedem andern Zweige der Naturphilosophie, nehmen wir an, dass die materielle Welt von unveränderlichen und bestimmten Gesetzen beherrscht wird, und es ist alsdann unser Zweck, diese Gesetze zu entdecken, so wie die daraus fließenden Folgerungen zu ziehen.

Es sei z. B. die Bewegung eines gegen die Oberfläche der Erde zu fallenden Steines zu bestimmen, die Geschwindigkeit, mit welcher er sich bewegt, und der Weg, welchen er beschreibt, wenn er nach irgend einer Richtung im Raume geworfen wird; — desgleichen die Art und Weise, wie ein schwerer Körper durch ein einfaches oder zusammengesetztes Instrument getragen wird; — die Bewegung einer Maschine, vermittelst welcher Gewichte auf- oder niederwärts bewegt werden; — die Form und Einrichtung, oder die mögliche Festigkeit und Stabilität einer materiellen Construction, und überhaupt die Verhältnisse und Umstände aller der Fälle, wo Körper durch andere, womit sie in Berührung kommen, gezogen, gestoßen oder in ihrer Bewegung aufgehalten werden, oder wenn Körper in der Entfernung sich gegenseitig anziehen oder abstoßen.

Jede Ursache, welche einen Körper bewegt, oder zu bewegen strebt, oder welche seine Bewegung abändert, oder abzuändern strebt, heißt **Kraft.**

Den Begriff der Bewegung erhalten wir zuerst durch die Erscheinungen und Ereignisse, welche wir in der materiellen Welt wahrnehmen; aber wir finden auch, dass wir durch unsern eigenen Willen und Anstrengung oft die Bewegung der Körper hervorbringen können; wir sehen, dass sie auch einander Bewegung mitzutheilen scheinen, und

wir erhalten auf diese Weise den Begriff der Kraft. Indem wir Bewegungen und die Veränderung oder Verhinderung der Bewegung als Wirkungen betrachten, und auf ihre unmittelbaren Ursachen beziehen, belegen wir eine solche unmittelbare Ursache mit dem allgemeinen Namen Kraft.

Z. B. wenn ein Mensch einen Stein in seiner Hand hält, so sagen wir, er übe eine Kraft auf denselben aus; und ebenso, wenn er vermittelst einer Kurbel eine Maschine in Bewegung setzt, so sagt man, er übe auf die Kurbel und vermittelst dieser auf die Maschine eine Kraft aus. Wenn die Maschine durch das Gewicht eines schweren Körpers bewegt wird, so sagt man, dieser Körper übe darauf eine Kraft aus, und wenn ein Stein von einer Höhe herabfällt, so sagt man, er werde durch die Schwerkraft oder durch die Anziehung der Erde bewegt.

§. 2. Alles was Ausdehnung hat, und der Wirkung einer Kraft einen Widerstand entgegenstellen kann, wird Materie, und in sofern sie innerhalb gewisser Grenzen eingeschlossen ist, ein Körper genannt.

In dem Begriffe einer ausgeübten Kraft liegt zugleich der Begriff einer gewissen, dem Gegenstande, auf welchen die Kraft ausgeübt ist, inhärirenden Kraft des Widerstandes, und diese Kraft des Widerstandes selbst gibt sich dadurch zu erkennen, dass sie andere Körper von dem Raume, welchen der Körper, worauf die Kraft wirkt, einnimmt, ausschließt, dass sie die Fortpflanzung der Kraft auf andere Körper bewirkt, dass zur Hervorbringung einer schnellern Bewegung desselben Körpers auch eine größere Kraft erforderlich ist, u. s. f.

Hiernach sind die festen oder starren Körper, welche die Mechanik betrachtet, von den in der Geometrie betrachteten verschieden; denn in dieser letztern werden die Körper blos als Ausdehnung, aber keine tastbare Materie habend angesehen, und sind nur Modificationen und Limitationen unserer Vorstellung des Raumes; sie nehmen einen Raum ein, ohne andere geometrische Körper oder Figuren von demselben Raume auszuschließen und haben keine materielle Substanz oder mechanische Attribute. In der Mechanik dagegen betrachten wir die Körper als wirklich existirend und nicht blos als ausgedehnt, sondern auch als undurchdringlich, starr oder biegsam, träge und schwer.

In der Mechanik, wie in allen andern Wissenschaften, besteht unsere Absicht in der Aufstellung allgemeiner theoretischer Wahrheiten, und wir modificiren und verfeinern unsere gewöhnlichen Begriffe so, dass sie diesem Zwecke entsprechen. Die Begriffe, welche wir durch die gewöhnlichen praktischen Anwendungen unserer geistigen Fähigkeiten erlangen, bilden die Grundlage alles unsers Wissens; aber sie sind in

ihrer gewöhnlichen Form zu unbestimmt und unvollständig, als dass sie den unmittelbaren Gegenstand einer exacten Wissenschaft bilden könnten, und wir müssen sie genau definiren und bestimmen, sie rein und abstract darstellen und endlich erweitern und verallgemeinern. Auf diese Weise bekommen sie alsdann eine solche Beschaffenheit, dass sie sich durch Definitionen, Axiome und Gesetze ausdrücken lassen, ihrem Umfange und Inhalte nach genau bestimmt sind und zu wissenschaftlichen Sätzen und Wahrheiten führen können.

Diese Verbesserung des unbestimmten ursprünglichen Begriffes der Kraft ist daher der erste Schritt, welcher in den mechanischen Wissenschaften zu thun ist. Die Kraft muss als eine messbare Größe vorgestellt und die Wahrheit gewisser, sich auf sie beziehenden Grundprinzipien klar eingesehen werden, ehe wir in unsere Betrachtungen weiter eingehen können. Dieses wollen wir durch folgende Betrachtungen zu erreichen suchen.

§. 3. Kräfte bringen entweder Ruhe, oder Bewegung der Körper hervor.

Es ist bereits früher bemerkt worden, dass die Wissenschaft, womit wir uns zu beschäftigen haben werden, sich mit den Gesetzen der Ruhe und Bewegung der Körper beschäftigt. Eine einzelne Kraft muss nothwendig Bewegung hervorbringen, aber zwei oder mehrere Kräfte können so mit einander verbunden sein, dass sich ihre Wirkungen gegenseitig aufheben, und die Ruhe des Körpers bewirken. Wenn z. B. zwei Menschen mit gleicher Stärke an den beiden Enden eines geradlinigen Seiles ziehen, wie in Figur 3., oder an den Enden eines Seiles, welches über ein festes Hinderniss geht, wie in Fig. 4., oder wenn zwei Gewichte P und Q (Fig. 7.) einander an einer starren Stange auf der Unterlage C an ihrer Bewegung hindern; so haben wir zwei Kräfte, welche Ruhe erzeugen. Wenn dagegen ein an dem Ufer eines Kanales befindlicher Mensch, wie in P (Fig. 1.), ein auf dem Wasser befindliches Boot B vermittelst eines Seiles BP zieht, so bewirkt er die Bewegung desselben in der Richtung BP; aber wenn zugleich zwei andere Menschen in Q und R das Boot nach den Richtungen BQ und BR ziehen, so kann es bei dem gehörigen Verhältniss der Richtungen der Seile und der Zugkräfte sehr wohl möglich sein, dass das Boot unter der gleichzeitigen Wirkung dieser drei Kräfte doch in Ruhe bleibt.

Dem ursprünglichen Begriffe nach ist Kraft die Ursache der Bewegung und wenn sie keine Bewegung hervorbringt, so muss letztere als durch eine entgegengesetzte Kraft, oder mehrere, verhindert angesehen

werden, und in diesem Falle sagt man, dass diese Kräfte einander das Gleichgewicht halten, oder einander gegenseitig aufheben.

§. 4. Zwei entgegengesetzte Kräfte, welche einander gegenseitig aufheben, sind auch einander gleich.

So sind z. B. die Kräfte Q und R (Fig. 3 oder 4.), wenn das Gewicht P hinweggedacht wird, offenbar einander gleich und jede kann als das Maß der andern angesehen werden, weil sie ihre Wirkungen genau aufhebt.

Kräfte lassen sich addiren. — Wenn z. B. zwei Menschen einen Körper nach derselben Richtung ziehen, so üben sie eine Kraft aus, welche die Summe ihrer einzelnen Kräfte ist, und es ist ein Mensch, nach der entgegengesetzten Richtung ziehend, erforderlich, welcher so stark als die beiden ersten zusammengenommen ist, wenn der Körper in Ruhe bleiben soll.

Kräfte lassen sich zusammensetzen. — So werden z. B. die zwei nach den Richtungen BQ, BR (Fig. 1.) wirkenden Kräfte zusammengesetzt und bringen dieselbe Wirkung als eine einzelne nach der Richtung BS wirkende Kraft hervor; denn sie werden durch eine in der Richtung BP wirkende Kraft gerade ebenso im Gleichgewichte erhalten, wie eine einzelne nach der Richtung BS wirkende Kraft.

Wenn zwei oder mehrere Kräfte so in eine einzige zusammengesetzt werden, so sagt man, sie sei den zusammengesetzten Kräften gleich, und es ist z. B. die nach der Richtung BS wirkende Kraft den nach den Richtungen BQ und BR wirkenden Kräften zusammengenommen gleich.

Die obigen Prinzipien führen auf die Messung der Kräfte; allein es ist für diesen Zweck geeigneter, eine besondere Art von Kraft zu betrachten, welche bei mechanischen Untersuchungen häufig vorkommt, wie dieses z. B. mit dem Gewichte der Körper der Fall ist.

§. 5. Alle Körper, welche wir wahrnehmen, fallen, oder streben gegen die Oberfläche der Erde zu fallen, und die Kraft, welche sie in Folge dieses Bestrebens ausüben, wird ihr Gewicht genannt.

Das Gewicht wird in Beziehung auf seine mechanischen Wirkungen betrachtet und von zwei Körpern, welche dieselbe Wirkung hervorbringen, sagt man, sie haben gleiche Gewichte. Es sei z. B. MA (Fig. 2.) die natürliche Lage einer Stahlfeder, welche durch eine daran aufgehangene Bleimasse P in die Lage MB gebogen wird, so hat eine Eisenmasse Q, welche, auf dieselbe Weise daran aufgehangen, sie in dieselbe Lage MB biegt, dasselbe Gewicht als die Bleimasse P, so dass, wenn P = 1 Pfund ist, auch Q = 1 Pfund ist.

Wenn wir auf dieselbe Weise zwei Körper mit einander verbin-

den, um durch ihr Gewicht dieselbe Art mechanischer Wirkung hervorzubringen, so addiren wir die aus ihrem Gewichte entspringenden Kräfte zusammen. Wenn z. B. in Fig. 2., P = 1 Pfd. und Q = 1 Pfd. ist, so sind beide zusammen = 2 Pfd., und es sei M C die Lage, in welche die Feder durch P und Q zusammengenommen gebogen wird, so wird jedes Gewicht, welches die Feder in die Lage M C biegt, 2 Pfd. genannt. Desgleichen, wenn drei Gewichte, wie P die Feder vereinigt in die Lage M D biegen, so wird jedes Gewicht, welches die Stahlfeder in dieselbe Lage biegt, 3 Pfd. genannt, u. s. f.

Wenn wir statt der Biegung einer Stahlfeder irgend eine andere mechanische Wirkung genommen hätten, so wäre die Erklärungsweise, wie das Gewicht gemessen wird, dieselbe gewesen.

§. 6. Das Gewicht eines Körpers ist die Summe der Gewichte seiner Theile.

Aus dem eben Gesagten erhellet, dass durch Vereinigung mehrerer Körper ihre Gewichte zusammenaddirt werden, und folglich ist das Gewicht eine Eigenschaft, welche einem Körper als aus Theilen bestehend angehört. Bei einer nähern Untersuchung erhellet, dass das Gewicht eines Körpers nur von der Anzahl seiner Theile abhängt, und dass ihre Anordnung unter einander, oder andere Umstände auf das Gewicht des ganzen Körpers keinen Einfluss haben. Ein Korb voll Steine behält stets dasselbe Gewicht, in was für neue Lagen die Steine durch Schütteln auch gebracht werden mögen. Dieselbe Masse Materie hat immer dasselbe Gewicht, in welche neue Form man sie auch bringen mag. Wenn $2\frac{1}{2}$ Kubikzoll Blei 1 Pfd. wiegen, so wiegen 25 Kubikzoll Blei stets 10 Pfd., welche Gestalt oder Form sie auch haben mögen.

Die Materie nehmen wir, wie bereits bemerkt, ursprünglich durch den Widerstand, welchen sie einer Kraft entgegengestellt, wahr; allein ihre Eigenschaften geben sich auch durch jede ihrer mechanischen Wirkungen zu erkennen. Die Quantität oder Menge der Materie wird als dieselbe betrachtet, wenn die mechanische Wirkung dieselbe ist, und zur Messung der Quantität der Materie müssen wir uns einer solchen Eigenschaft derselben bedienen, dass sie für die ganze Masse dieselbe ist, als für die einzelnen Theile zusammengenommen. Da nun das Gewicht eine solche Eigenschaft ist, so wollen wir die Quantität der Materie durch das Gewicht messen.*)

*) Man sagt zuweilen, die Quantität der Materie sei ihrer Trägheit, d. h. ihrem Widerstande der Mittheilung der Bewegung proportional; allein praktisch wird die Quantität der Materie immer durch das Gewicht gemessen und

Dieselbe mechanische Wirkung kann durch Massen von verschiedener Größe hervorgebracht werden, wenn die Art der Masse oder Materie verschieden ist, und es bringen z. B. $3\frac{1}{2}$ Kubikzoll Eisen durch ihr Gewicht dieselbe Wirkung hervor, als $2\frac{1}{2}$ Kubikzoll Blei. Nun wird aber angenommen, dass, so lange die mechanische Wirkung dieselbe ist, auch die Quantität der Materie dieselbe bleibt. Man sagt daher, dass die Quantität der Materie in $3\frac{1}{2}$ Kubikzoll Eisen dieselbe ist, als in $2\frac{1}{2}$ Kubikzoll Blei, und der Unterschied der Größe beider Massen wird als von der Verschiedenheit ihrer Poren, d. h. der nicht mit wägbarer Materie erfüllten leeren Zwischenräume herrührend angenommen.

§. 7. Wenn ein fester Körper in der Richtung seines Gewichtes vermittelst einer Schnur oder starren Stange wirkt und die Schnur oder Stange als gewichtslos angenommen wird, so wird die mechanische Wirkung des Körpers durch die Länge der Schnur oder Stange nicht geändert.

Es sei P (Fig. 3.) ein Gewicht, welches von einer in Q befindlichen Hand vermittelst einer Schnur QP gehalten wird, so ist die auf die Hand ausgeübte Kraft dem Gewichte selbst gleich. Denn wenn man sich statt des Gewichtes P in R z. B. eine Hand denkt, welche eine ihm gleiche Kraft ausübt, so wird diese Kraft, wie das Gewicht getragen, weil die Kraft der Hand dieselbe Wirkung hervorbringt, als das Gewicht. Aber in diesem Falle ist klar, daß die in Q und R ausgeübten Kräfte einander gleich sein müssen, welche Länge die Schnur auch haben mag, weil es gleichartige Kräfte sind und genau in gleicher Weise auf sie wirken. Demnach ist die in Q ausgeübte Kraft dem Gewichte P gleich, welchem nach der Annahme die in R wirkende Kraft gleich ist, und folglich ist die in Q ausgeübte Kraft dieselbe, welche Länge die Schnur auch haben mag.

Derselbe Schluss gilt auch noch, wenn PQ eine starre Stange wäre, und in beiden Fällen besteht die alleinige Eigenschaft der betrachteten Schnur oder Stange QP in ihrer Fortpflanzungsfähigkeit der Wirkung der Kraft von einem Punkte P nach einem andern Punkte Q. Wir betrachten die Schnur oder Stange als ganz gewichtslos; denn ihr Gewicht hat nichts mit ihrer Bestimmung als Fortpflanzungsmittel der Kraft von einem Punkte nach einem andern zu thun.

---

bei der Betrachtung des dritten Bewegungsgesetzes soll gezeigt werden, dass sich die Trägheit wie das Gewicht verhält.

Ihr Gewicht nehmen wir als sehr gering an; aber es kommt bei unsern Untersuchungen ganz und gar nicht in Betracht.

§. 8. Wenn ein schwerer Körper vermittelst einer Schnur, die über einen festen Punkt O (Fig. 4.) hingleiten kann, wirkt, und die Schnur als gewichtslos angenommen wird; so wird der schwere Körper immer durch dieselbe Kraft im Gleichgewichte gehalten, welche Länge und Richtung die Schnur auch haben mag.

Es werde das Gewicht P von einer Hand, die an einer über den festen Punkt O gehenden Schnur in Q wirkt, getragen, es sei OR = OQ und in R wirke eine Kraft, welche dem Gewichte P gleich ist, so wird nach dem vorhergehenden §. diese Kraft durch die in Q wirkende im Gleichgewichte erhalten. Aber die in Q und R wirkenden Kräfte müssen einander gleich sein, weil es gleichartige Kräfte sind und sie an der Schnur QOR genau auf dieselbe Weise wirken, und der einzige Unterschied besteht darin, dass die eine in verticaler Richtung wirkt, aber die andere nicht, wodurch ihr Gleichgewicht nicht gestört werden kann, weil keine der beiden Kräfte Q und R von der Schwere abhängig ist. Folglich ist die in Q wirkende Kraft stets der in R wirkenden gleich und mithin auch dem Gewichte P. Sie bleibt also dieselbe, welche Länge und Richtung die Schnur OQ auch haben mag.

Statt des festen Punktes O hätten wir auch eine um ihren Mittelpunkt bewegliche Rolle annehmen können und die Schlüsse wären noch dieselben.

§. 9. Die Wissenschaft der Mechanik wird in zwei Abtheilungen, die **Statik** und die **Dynamik** getheilt.

Die Körper haben, wie später gezeigt werden wird, weder für den Zustand der Ruhe, noch für den der Bewegung einen besondern Hang. Wenn sie sich in Ruhe befinden, so bleiben sie so lange darin, als keine Kraft auf sie wirkt; aber die geringste wirkende und nicht aufgehobene Kraft bringt Bewegung hervor. Wenn also auf einen in Ruhe befindlichen Körper oder auf ein System von Körpern eine Anzahl von Kräften wirkt, so sind zwei Fälle möglich: entweder die Kräfte heben einander gegenseitig auf und bringen das Gleichgewicht hervor (§. 3.), oder sie bringen Bewegung hervor. In dem letzten Falle haben wir die Richtung, Geschwindigkeit und Dauer der Bewegung zu betrachten, und im ersten Falle nur die Relationen zwischen den sich gegenseitig aufhebenden Kräften. Es ist daher am zweckmäßigsten, jeden dieser Fälle einzeln zu behandeln.

Demnach theilen wir unsern Gegenstand in zwei Abtheilungen,

wovon die erste sich auf die im Gleichgewichte befindlichen und die zweite sich auf die Bewegung hervorbringenden Kräfte bezieht. Die erste Abtheilung wird die Statik und die zweite die Dynamik genannt.

Im ersten Falle, wo die Kräfte als andern das Gleichgewicht haltend und im zweiten Falle als Bewegung erzeugend betrachtet werden, müssen sie auch auf verschiedene Weise gemessen werden.

§. 10. In der Statik wird eine Kraft durch das Gewicht gemessen, welches sie zu tragen vermag.

Welche Richtung und Größe eine Kraft auch haben mag, so können wir doch immer annehmen, dass sie, wie die Kraft Q (Fig. 4.), vermittelst einen über eine Rolle O gehenden und ein Gewicht P tragenden Schnur wirkt und dass sie durch dieses Gewicht gemessen wird. Statische Kräfte werden Druckkräfte genannt. Wenn z. B. ein schwerer Körper auf einer Unterlage ruht, so übt er einen niederwärts gerichteten Druck auf dieselbe aus und wird vermittelst des aufwärts gerichteten Druckes der letztern in Ruhe erhalten. Der aufwärts gerichtete Druck jeder Unterlage ist dem niederwärts gerichteten Drucke auf dieselbe gleich, und wenn letzterer die Wirkung genannt wird, so wird ersterer die Gegenwirkung genannt.

Die vermittelst Schnüren, woran irgend welche Kräfte wirken, ausgeübten Druckkräfte, werden Spannungen genannt.

In den folgenden Paragraphen haben wir alle Fälle des Gleichgewichtes auf die möglichst einfachen Prinzipien zurückzuführen. Z. B. in dem bereits oben angeführten Falle, wo drei Kräfte BQ, BP, BR (Fig. 1.) einander das Gleichgewicht halten, kann jede derselben als den beiden andern, auf denselben Punkt wirkenden Kräften das Gleichgewicht haltend angesehen werden. In Fig. 17. hält eine Kraft AP ein Rad AC, gegen ein Hinderniss C gedrückt, im Gleichgewicht, und kann als in A wirkend und dem Gewichte, welches auf das Rad drückt und als in demselben Punkte wirkend angesehen wird, das Gleichgewicht haltend betrachtet werden. Aber in diesem Falle können wir nach §. 7. die Kraft AP auch als in M und das Gewicht als in N wirkend annehmen, und wir werden Kräfte zu betrachten haben, welche auf verschiedene Punkte eines um den Punkt C beweglichen Körpers wirken. Ebenso werden wir in Fig. 41. annehmen, dass die Schnüre AK und BC mit der Rolle AB und dem Gewichte W, welches daran aufgehangen ist, ihre Kraft in demselben Punkte n, worin sich ihre Richtungen schneiden, ausüben. Aber wir werden uns diese Kräfte auch als in den Punkten A, B und o des festen Körpers AB wirkend und denselben im Gleichgewicht haltend zu denken haben, und

durch ähnliche Betrachtungen können die zusammengesetzten Fälle des Gleichgewichtes auf einfache Prinzipien zurückgebracht werden.

Die einfachsten Prinzipien, auf welche die statischen Lehren zurückgeführt werden können, sind das Gleichgewicht auf denselben Punkt wirkender, und das an dem Hebel wirkender Kräfte, und zwar stehen diese beiden Grundsätze in einem solchen Zusammenhange, dass der eine aus dem andern abgeleitet werden kann. Der einfachste Weg scheint der zu sein, zuerst den letzten Satz aufzustellen, wie wir es in dem folgenden Kapitel thun werden, und dann die Zusammensetzung der Kräfte, welche der Gegenstand des zweiten Kapitels ist, daraus abzuleiten.

Statik.

Erstes Kapitel.

Vom Hebel.

§. 11. Ein Hebel ist eine starre Stange, welche um einen festen Punkt, der Unterstützungspunkt, oder der Drehungsmittelpunkt genannt, beweglich ist, und woran Kräfte wirken, welche sie um diesen Unterstützungspunkt zu drehen streben.

Die Theile des Hebels zwischen dem Unterstützungspunkte und den Punkten, worin die Kräfte angebracht sind, werden Hebelarme genannt.

Wenn die Hebelarme in derselben geraden Linie liegen, so wird der Hebel ein geradliniger genannt und im entgegengesetzten Falle ein gebrochener oder Winkelhebel.

Die Kräfte, welche auf den Hebel wirken, werden als in der Ebene liegend angenommen, in welcher er beweglich ist.

Der Hebel wird im Allgemeinen als gewichtslos betrachtet und die Eigenschaften desselben lassen sich aus folgenden Grundsätzen ableiten.

§. 12. Grundsatz I. Gleiche Kräfte, welche an gleichen Hebelarmen senkrecht auf dieselben wirken und den Hebel nach entgegengesetzten Richtungen zu drehen streben, halten einander das Gleichgewicht.

Denn da die Kräfte auf völlig gleiche Weise wirken, und da kein Grund vorhanden ist, weswegen die eine die andere überwiegen sollte und endlich nicht beide zugleich den Hebel drehen können; so muss er sich im Gleichgewichte befinden.

Wenn eine der Kräfte größer ist, aber die Hebelarme gleich bleiben, oder wenn eine Kraft an einem längern Hebelarme wirkt, die Kräfte selbst aber gleich sind; so bekommt die größere Kraft oder der längere Hebelarm das Uebergewicht, und das Gleichgewicht ist gestört.

Zusatz 1. Hiernach sind auch die umgekehrten Sätze wahr, nämlich:

Wenn zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte in den Endpunkten eines Hebels senkrecht auf denselben wirken, und denselben im Gleichgewichte halten, so sind die Hebelarme einander gleich. Denn wenn sie nicht gleich wären, so würde der längere das Uebergewicht bekommen.

Wenn zwei Kräfte senkrecht in den Endpunkten gleicher Hebelarme wirken und den Hebel nach entgegengesetzten Richtungen zu drehen streben, denselben im Gleichgewichte halten; so sind die Kräfte einander gleich. Denn wenn sie nicht gleich wären, so würde die größere das Uebergewicht bekommen.

Zusatz 2. Wenn ein Gewicht VV (Fig. 5.) in gleichen Entfernungen von den beiden Unterstützungspunkten A und B an einer starren Stange A B aufgehangen ist, so wird auf beide Unterstützungspunkte ein gleicher Druck ausgeübt; denn es ist kein Grund vorhanden, weswegen der eine größer sein sollte als der andere.

Zusatz 3. Wenn zwei gleiche Gewichte P, Q (Fig. 5.) an einer starren Stange auf zwei Unterlagen A und B, welche so liegen, dass P A = Q B ist, ruhen, so ist der Druck auf A und B gleich und zwar aus demselben Grunde, wie in dem letzten Zusatze.

§. 13. Grundsatz 2. Wenn zwei gleiche Gewichte an einem geradlinigen Hebel einander das Gleichgewicht halten, so ist der Druck auf den Unterstützungspunkt gleich der Summe der Gewichte, wie lang der Hebel auch sein mag.

Wenn A B (Fig. 5.) ein Hebel ist, welcher auf zwei Unterlagen A und B ruhet und in seiner Mitte ein Gewicht VV trägt, so ist der Druck auf die zwei Unterlagen A und B zusammengenommen dem Gewichte VV gleich.

Grundsatz 3. Wenn zwei gleiche Gewichte an einer geradlinigen Stange aufgehangen und ihre beiden Unterstützungspunkte gleichweit von den Gewichten entfernt sind, so sind die Druckkräfte auf die Unterstützungspunkte zusammengenommen gleich der Summe der beiden Gewichte.

Wenn z. B. in Fig. 5 oder 6. die beiden gleichen Gewichte P und Q von A und B getragen werden, und P A = Q B ist, so sind die Druckkräfte auf A und B zusammengenommen gleich den Gewichten P und Q.

Diese beiden Grundsätze sind für sich einleuchtend, wenn man sich genau denkt, was man unter Druckkraft, Gewicht und Gleichgewicht zu verstehen hat. Die zum Tragen des ganzen Gewichtes angewandten Druckkräfte müssen demselben zusammengenommen gleich sein (§. 4.), und das ganze Gewicht ist gleich dem Gewichte der Theile (§. 6.).

Es mag bemerkt werden, daß der Grundsatz offenbar sowohl für beliebige als für gleiche Gewichte richtig ist; aber der Einfachheit wegen beschränken wir die Anwendung desselben nur auf den letzten Fall.

Zusatz. Wenn ein Gewicht von einem Hebel getragen wird, welcher auf zwei Unterlagen ruht, die gleichweit von dem Gewichte entfernt sind, so ist der ganze Druck auf die Unterlagen dem Gewichte gleich.

Die aufwärts gerichteten Druckkräfte der Unterlagen halten in diesem Falle dem niederwärtsgerichteten Drucke des Gewichtes genau auf dieselbe Weise das Gleichgewicht, wie die niederwärtsgerichteten Druckkräfte der Gewichte in dem Grundsatze dem aufwärtsgerichteten Drucke der Unterlage das Gleichgewicht halten. Die Druckkräfte in jeder Richtung werden von denen in entgegengesetzter Richtung im Gleichgewichte gehalten, und der Begriff aufwärts und niederwärts hat durchaus nichts zu schaffen mit der Relation der Kräfte zu einander. Daher sind die Beziehungen der Druckkräfte in diesem und dem ersten Falle dieselben, d. h. der Druck, welcher nach einer Richtung wirkt, ist in dem einen, wie in dem andern Falle dem Drucke gleich, welcher in der entgegengesetzten Richtung wirkt.

§. 14. Satz. Wenn zwei gleiche Gewichte senkrecht auf einen geradlinigen Hebel wirken, so wird ihnen in Beziehung auf jede beliebige Unterlage durch dieselbe Kraft das Gleichgewicht gehalten, als wenn sie in der Mitte ihrer gegenseitigen Entfernung vereinigt wären.

Es seien P und Q (Fig. 5 und 6.) die beiden Gewichte, A die Unterlage und W der Mittelpunkt, $WB = WA$ und B ein zweiter Unterstützungspunkt. Wenn gleiche Gewichte P und Q an dem Hebel getragen werden, so sind die Druckkräfte auf die beiden Unterstützungspunkte nach Zus. 3. zu Grundsatz 1. einander gleich, und der ganze Druck ist nach Grundsatz 3. gleich $P + Q$ und folglich ist der Druck auf jeden Unterstützungspunkt $= \frac{1}{2}(P + Q)$.

Wenn ein Gewicht $W = P + Q$ in den Mittelpunkt gebracht wird, so ist der Druck auf jeden Unterstützungspunkt nach Zus. 2. zu Grundsatz 1. der Hälfte des ganzen Druckes gleich; aber der ganze Druck ist nach Grundsatz 3. $= P + Q$ und folglich ist der Druck auf jeden Unterstützungspunkt $= \frac{1}{2}(P + Q)$. Mithin ist der Druck auf den Unterstützungspunkt B in jedem Falle $= \frac{1}{2}(P + Q)$, und folglich wird der

Hebel in beiden Fällen durch dieselbe in B angebrachte Kraft im Gleichgewichte gehalten.

Zusatz. Hiernach bringt ein horizontales Prisma oder ein Cylinder von gleichförmiger Dicke und Masse dieselbe Wirkung hervor, als wenn letztere in seinem Mittelpunkte vereinigt wäre.

Z. B. ein Cylinder BD (Fig. 7.) übt auf den Hebel CB dieselbe Wirkung aus, als wenn seine Masse in seiner Mitte N vereinigt wäre; denn dieser Cylinder kann als aus Paaren von gleichen kleinen Gewichten, wie d und b, die gleichweit von N entfernt sind, zusammengesetzt betrachtet werden, und ein jedes dieser Paare bringt dieselbe Wirkung hervor, als wenn seine Masse in N vereinigt wäre. Folglich bringt der ganze Cylinder dieselbe Wirkung hervor, als wenn seine Masse in der Mitte N vereinigt wäre.

§. 15. Lehrsatz. Wenn zwei Gewichte auf entgegengesetzten Seiten des Unterstützungspunktes senkrecht auf einen Hebel wirken, und ihre Entfernungen von dem Unterstützungspunkte verhalten sich umgekehrt wie sie selbst, so halten sie einander das Gleichgewicht.

Es seien P und Q (Fig. 7.) die beiden Gewichte und AB ein Cylinder, dessen Gewicht der Summe der beiden Gewichte gleich ist. Man theile AB in D so, dass sich $AD:DB = P:Q$ verhält, so ist das Stück AD des Cylinders gleich dem Gewichte P, und das Gewicht des Stückes $DB = Q$ und endlich ist der Cylinder AB um seinen Mittelpunkt C im Gleichgewichte.

Es sei M die Mitte von AD und N die von BD, so bringt der Cylinder AD nach dem vorhergehenden §. dieselbe Wirkung hervor, als wenn seine Masse in M vereinigt wäre und der Cylinder BD dieselbe Wirkung, als wenn die seinige in N vereinigt wäre. Wenn wir daher annehmen, daß AB statt eines Cylinders eine gewichtslose starre Stange ist, an welcher in M ein Gewicht gleich dem von AD und in N ein Gewicht gleich dem von BD wirkt; so halten diese beiden Gewichte in Beziehung auf den Unterstützungspunkt einander stets das Gleichgewicht, d. h. das in M wirkende Gewicht P und das in N wirkende Gewicht Q halten einander in Beziehung auf den Unterstützungspunkt C stets das Gleichgewicht, und folglich nach §. 7. auch, wenn sie an den Schnüren MP und NQ aufgehangen werden.

Da nun $DM = \frac{1}{2}DA$ und $DN = \frac{1}{2}DB$ ist, so ist auch $MN = \frac{1}{2}AB$.

Ferner ist: $CM = CA - AM = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}AD$

und $DN = MN - DM = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}AD$

$CM = DN$, und folglich $DM = CN$.

Mithin verhält sich: $CM:CN = DN:DM = DB:DA = Q:P$.

Wenn also die Gewichte und ihre Entfernungen von dem Unterstützungspunkte in diesem Verhältnisse stehen, so halten erstere einander das Gleichgewicht.

Zusatz 1. Umgekehrt, wenn die Gewichte P und Q in Beziehung auf den Unterstützungspunkt C einander das Gleichgewicht halten, so verhält sich $P:Q=CN:CM$. Denn wenn dieses nicht der Fall wäre, so verhalte sich $P:Q'=CN:CM$, und folglich müssten P und Q' nach dem Lehrsatze einander das Gleichgewicht halten; mithin bringen Q und Q' in N dieselbe Wirkung hervor und müssen folglich einander gleich sein.

Zusatz 2. Der Druck auf den Unterstützungspunkt C ist gleich der Summe der Gewichte P und Q. Denn der Druck der Gewichte P und Q auf den Unterstützungspunkt C ist derselbe als der Druck, welchen der Cylinder AB auf diesen Punkt ausübt, und dieser Druck ist derselbe als wenn die Masse des Cylinders AB, dessen Gewicht $=P+Q$ ist, in C vereinigt wäre (§. 14.).

Zusatz 3. Was eben von Gewichten bewiesen ist, gilt auch für beliebige Kräfte; denn diese können durch Gewichte gemessen werden (§. 10.) und es ist z. B. auf die nach den Richtungen CR und MP (Fig. 8.) wirkenden Kräfte anwendbar, indem N der Unterstützungspunkt ist.

§. 16. Lehrsatz. Wenn zwei Kräfte auf derselben Seite des Unterstützungspunktes senkrecht auf einen geradlinigen Hebel wirken, und sich umgekehrt wie ihre Entfernungen von dem Unterstützungspunkte verhalten, so halten sie einander das Gleichgewicht.

In diesem Falle müssen die Kräfte nach entgegengesetzten Richtungen wirken, wie die in M und N (Fig. 8 und 9.) wirkenden Kräfte P und Q.

Wenn wir annehmen, dass an dem Unterstützungspunkte C eine Kraft R wirkt, welche zu der in M wirkenden parallel ist, und die Proportion $R:P=MN:NC$ stattfindet, so halten die Kräfte P und R einander um den Unterstützungspunkt N das Gleichgewicht und der Druck in N ist nach Zus. 2 und 3. des vorhergehenden §. $=P+R$. Wenn also in N eine Kraft $P+R$ nach entgegengesetzter Richtung wirkt, so bringt sie dieselbe Wirkung als der Unterstützungspunkt N hervor. Wenn daher $Q=P+R$ ist, so halten die drei Kräfte P, Q, R den Hebel im Gleichgewichte, und dieses findet statt, wenn sich verhält:

$$R:P=NM:NC$$

oder $$R+P:P=NM+NC:NC$$

oder $$Q:P=MC:NC.$$

Wenn also P und Q in diesem Verhältnisse stehen, so halten sie einander das Gleichgewicht.

Zusatz 1. Umgekehrt, wenn die Gewichte P und Q sich in Beziehung auf den Unterstützungspunkt C das Gleichgewicht halten, so verhält sich:

$$P : Q = CN : CM.$$

Zusatz 2. Der Druck auf den Unterstützungspunkt C ist gleich dem Unterschiede der beiden Kräfte P und Q; denn er ist = R, und da $P + R = Q$ ist, so folgt $R = Q - P$

und hat folglich die Richtung der größern Kraft Q.

Zusatz 3. Wenn wir die äußern und mittlern Glieder der letzten oder vorletzten Proportion in einander multipliciren, so erhalten wir die Gleichung: $P . CM = Q . CN.$

§. 17. Wenn der Hebel als ein mechanisches Instrument angesehen wird, so ist eine der beiden Kräfte, z. B. Q, ein zu hebendes oder zu tragendes Gewicht (Last), und die andere wird zur Hervorbringung dieser Wirkung angewandt, weswegen P alsdann die Kraft und Q das Gewicht oder die Last genannt wird.

Die geradlinigen Hebel werden in drei Arten abgetheilt.

Der Hebel der ersten Art ist der, woran die Kraft und Last auf entgegengesetzten Seiten des Unterstützungspunktes liegen, wie in Fig. 7.

Die Scheeren, Zangen ꝛc. sind Beispiele doppelter Hebel dieser Art. Der Unterstützungspunkt ist der Mittelpunkt der Drehung, die Kraft der Finger die Kraft, und der von dem zu zerschneidenden oder zu haltenden Körper ausgeübte Widerstand die Last.

Der Hebel der zweiten Art ist der, woran sich die Kraft und Last auf derselben Seite des Unterstützungspunktes befinden, und zwar die Kraft weiter davon entfernt.

Eine Schneidemaschine, Nussknacker ꝛc. sind Beispiele von Hebeln dieser Art. Auch das Ruder gehört zu dieser Klasse von Hebeln; der Unterstützungspunkt ist der Punkt des Ruders, welcher im Wasser einen Augenblick unbeweglich ist, während das Fahrzeug vorwärts getrieben wird; die Kraft ist der Stoß des Ruderers, und die Last der Druck des Ruders auf die Seite des Fahrzeuges.

In allen diesen Fällen gewährt der Hebel einen mechanischen Vortheil, weil die Kraft an dem längern Hebelarme wirkt, d. h. der hervorgebrachte Druck ist größer als die dazu angewandte Kraft.

Der Hebel der dritten Art ist der, woran sich die Kraft auf derselben Seite des Unterstützungspunktes als die Last befindet, und zwar näher an dem Unterstützungspunkte wie in Fig. 9.

In diesem Falle bringt die Kraft stets einen kleinern Druck hervor als sie selbst ist, und das Instrument soll nicht sowohl dazu dienen, einen mechanischen Vortheil zu erlangen, als vielmehr eine Kraft in einer größern Entfernung wirken zu lassen.

Beispiele dieser Art von Hebeln sind die Feuerzange und Schafschere.

Auch gewisse Knochen der Thiere sind in Beziehung auf das Gleichgewicht als Hebel dieser Art zu betrachten, indem das Gelenk der Unterstützungspunkt, die näher an demselben liegenden Muskeln die Kraft und die Last, die von dem weiter von dem Gelenke entfernten Gliede ausgeübte Kraft ist.

§. 18. Beispiele des geradlinigen Hebels.

Beispiel 1. An einem Hebel der ersten Art von 3 Fuß Länge ist an dem einen Ende ein Gewicht von 100 Pfd. aufgehangen und $2\frac{2}{3}$ Zoll von diesem Ende liegt der Unterstützungspunkt; was für ein Gewicht muß an dem andern Ende des Hebels angebracht werden, damit er sich im Gleichgewichte befindet?

In Fig. 7. ist $MN = 36$ Zoll, $CM = 2\frac{2}{3}$ Zoll und $CN = 33\frac{1}{3}$ Zoll, und da sich verhalten muß: $P:Q = 33\frac{1}{3}:2\frac{2}{3} = 100:8$ und $P = 100$ Pfd. ist; so ergibt sich $Q = 8$ Pfd.

Beispiel 2. An einem geradlinigen Hebel MO (Fig. 10.) seien die Längen MC, CN, NN', $N'N''$ &c. alle einander gleich und ein Gewicht Q lasse sich längs des Armes CO verschieben, wie groß sind die Gewichte in M, welchen dieses Laufgewicht in N, N', N'',... das Gleichgewicht hält?

Das Gewicht Q in N hält dem Gewichte Q in M, das Gewicht Q in N' dem Gewichte $2Q$ in M, das Gewicht Q in N'' dem Gewichte $3Q$ in M,... das Gleichgewicht. Wenn also das Gewicht des Hebels nicht in Betracht kommt, so ist das Gewicht in M bekannt, wenn man die Lage des Laufgewichtes Q kennt, und wir werden später sehen, wie das Gewicht des Hebels selbst mit in Rechnung gebracht wird.

Wenn $CM = CN$ ist, so sind die Gewichte in M und N einander gleich, und eins derselben kann als Maß des andern dienen. Dieses ist bei der gewöhnlichen Wage der Fall; aber wenn ihre Arme ungleich lang sind, so wird sie eine falsche Wage genannt.

Beispiel 3. Vermittelst einer falschen Wage das Gewicht eines Körpers doch richtig zu bestimmen.

Es seien die Längen CM und CN ungleich und x das gesuchte Gewicht. In N werde dem Gewichte x durch a Pfd. in M das Gleichgewicht gehalten und ebenso werde dem Gewichte x in M durch b Pfd. in N das Gleichgewicht gehalten, so hat man:

$$x : a = CM : CN$$
$$x : b = CN : CM$$
$$x^2 : ab = 1 : 1$$
$$x^2 = ab \text{ und } a : x = x : b.$$

Beispiel 4. Wenn ein Gewicht von einem in zwei Punkten unterstützten Hebel getragen wird, die auf diese Punkte ausgeübten Druckkräfte zu vergleichen.

An dem Hebel MN (Fig. 11.) werde durch die beiden Kräfte P, Q ein Gewicht R getragen, so wird auf M derselbe Druck ausgeübt, als wenn N ein Unterstützungspunkt wäre; folglich verhält sich:

$$P : R = NC : NM$$
und $$R : Q = NM : MC$$
also $$P : Q = NC : MC$$

oder die Druckkräfte verhalten sich umgekehrt, wie die Entfernungen von der Last.

§. 19. **Lehrsatz.** Wenn zwei Kräfte senkrecht auf die Arme eines Winkelhebels wirken, und sich umgekehrt wie diese Hebelarme verhalten, so halten sie einander das Gleichgewicht.

Es seien P, Q (Fig. 12.) die beiden Kräfte, welche senkrecht auf die Hebelarme CM, CN wirken, und so beschaffen sind, dass sich verhält:

$$P : Q = CN : CM,$$

so halten sie einander das Gleichgewicht.

Man verlängere NC bis D, so dass $CD = CM$ ist und in D lasse man eine Kraft $R = P$ senkrecht auf CD wirken, nehme ferner $CE = CM$ und lasse auf CN in E ebenfalls eine Kraft $S = P$ senkrecht wirken; so halten die Kräfte P und S einander das Gleichgewicht, weil sie einander gleich sind und ganz in gleicher Weise auf die Hebelarme CM, CE wirken. Aber die Kraft R hält der Kraft S das Gleichgewicht, weil $CD = CE$ ist, und folglich bringen die Kräfte P und R dieselbe Wirkung an dem Hebel hervor. Da sich aber verhält:

$$P : Q = CN : CM,$$

so haben wir:

$$R : Q = CN : CD,$$

folglich hält die Kraft R nach §. 15. der Kraft Q an dem geradlinigen Hebel das Gleichgewicht, und es hält also die Kraft P auch der Kraft Q an dem gebrochenen Hebel das Gleichgewicht.

Zusatz 1. Umgekehrt, wenn die Kräfte P und Q senkrecht auf die Arme des gebrochenen Hebels wirken, so verhalten sie sich umgekehrt, wie diese Hebelarme.

Zusatz 2. Wenn der Hebelarm CM oder CN irgend eine andere krummlinige Form CFM, aber dieselben Endpunkte hätte, so bleibt

auch in diesem Falle der Lehrsatz noch wahr; denn wenn man, indem CFM vollkommen starr ist, CM zieht, so ist die hervorgebrachte Wirkung ganz dieselbe, wenn für den Hebelarm CFM die starre Fläche CFMC substituirt wird, und wenn diese Fläche durch Parallellinien zu CM zum Theil hinweggenommen wird, so dass blos ein Streifen CM übrig bleibt; so bleibt die Wirkung offenbar dieselbe, wie zuvor. Welche Form also der Hebelarm CFM auch haben mag, so kann er doch immer als dem Hebelarme CM gleich geachtet werden.

§. 20. Lehrsatz. Wenn sich zwei unter beliebigen Winkeln auf die Arme eines Hebels wirkende Kräfte umgekehrt wie die von dem Unterstützungspunkte auf ihre Richtungen gefällten Perpendikel verhalten, so halten sie einander das Gleichgewicht.

Es sei ACB (Fig. 13.) der um einen festen Punkt C bewegliche Hebel, P und Q die beiden Kräfte, welche nach den Richtungen AP, BQ wirken, und CM, CN Perpendikel auf diese Richtungen, und es verhalte sich endlich $P:Q=CN:CM$; so halten die Kräfte einander das Gleichgewicht.

Man betrachte AM und CM als starre Stangen, so wird nach Zus. 2. des vorhergehenden §. dieselbe Wirkung hervorgebracht, die Kraft P mag an dem gebrochenen Hebelarme CAM oder an dem geradlinigen CM wirkend angenommen werden. Ebenso bringt die in B wirkende Kraft Q dieselbe Wirkung hervor, als wenn sie in N wirkte. Aber die in M uud N wirkenden Kräfte P und Q halten einander nach dem vorhergehenden §. das Gleichgewicht, weil sich verhält:

$$P:Q=CN:CM$$

und folglich halten sie einander auch das Gleichgewicht, wenn sie in A und B wirken.

Zusatz 1. Aus der letzten Proportion folgt die Gleichung:

$$P.CM=Q.CN.$$

Zusatz 2. Umgekehrt, wenn diese Proportion oder diese Gleichung stattfindet, so halten die beiden Kräfte einander das Gleichgewicht.

Zusatz 3. Ferner ist: $P.CA.\sin A=Q.CB.\sin B$.

Zusatz 4. Der Lehrsatz bleibt wahr, welchen Winkel die Hebelarme CA, CB auch mit einander bilden mögen, und er findet folglich auch noch dann statt, wenn dieser Winkel verschwindet und die Hebelarme zusammenfallen. D. h. wenn zwei Kräfte P, Q (Fig. 14.), in den Richtungen AP, BQ und in den Punkten A, B auf denselben, um den festen Punkt C beweglichen geradlinigen Hebel wirken, und sie verhalten sich umgekehrt wie die von diesem Punkte C auf ihre Richtungen gefällten Perpendikel, so halten sie einander das Gleichgewicht.

Zusatz 5. Wenn also zwei Kräfte an demselben Punkte eines Hebels wirken, ihn nach verschiedenen Richtungen zu drehen streben und sich umgekehrt wie die von dem Drehungsmittelpunkte auf ihre Richtungen gefällten Perpendikel verhalten; so halten sie einander das Gleichgewicht.

§. 21. Beispiele für den gebrochenen Hebel.

Beispiel 1. In Fig. 13. sei $P = 99$ Pfd., $Q = 100$ Pfd., $CA = 9$, $CB = 5$ und der Winkel $CAP = 30^0$; wie groß muss der Winkel CBN sein, wenn der Hebel im Gleichgewichte sein soll?

Man hat: $P.CA \sin A = Q.CB.\sin B$,

also $$\sin B = \frac{P.CA}{Q.CB} \sin A = \frac{99.9}{100.5}.\frac{1}{2}$$
$$= 0{,}891 = \sin 62^0;$$

folglich $CBN = 62^0$.

Beispiel 2. Wenn an einem geradlinigen Hebel AB (Fig. 15.) zwei Kräfte P und Q wirken und er ist unter ihrer Wirkung in horizontaler Lage im Gleichgewichte, so ist er es auch in jeder andern Lage.

Es sei AB irgend eine Lage des Hebels, MCN eine horizontale Linie und PAM, QNB zwei verticale Linien, so hat man, da in der horizontalen Lage des Hebels das Gleichgewicht stattfindet:

$$P:Q = CB:CA.$$

Aber die ähnlichen Dreiecke CBM und CBN geben die Proportion:

$$CB:CA = CN:CM;$$

folglich verhält sich: $P:Q = CN:CM$,

und mithin findet das Gleichgewicht statt.

Beispiel 3. An einem gewichtslosen Winkelhebel ACB (Fig. 16.) ist die Länge der Hebelarme, der Winkel, welchen sie mit einander bilden und die resp. an jedem wirkende Kraft P und Q gegeben; man soll die Gleichgewichtslage des Hebels bestimmen.

Man ziehe die horizontale Linie MCN, welche die verticalen Linien QB, PA in N, M schneidet. Es sei $CA = a$, $CB = b$, $ACB = \omega$ und der gesuchte Winkel $ACM = \varphi$; so ist $BCN = 180^0 - \omega - \varphi$ und:

$$P.CA.\cos ACM = Q.CB.\cos BCN$$
$$Pa\cos\varphi = Qb\cos(180^0 - \omega - \varphi) = -Qb\cos(\omega + \varphi)$$
$$= -Qb[\cos\omega\cos\varphi - \sin\omega\sin\varphi],$$
$$(Pa + Qb\cos\omega)\cos\varphi = Qb\sin\omega\sin\varphi$$
$$\operatorname{tang}\varphi = -\frac{Pa + Qb\cos\omega}{Qb\sin\omega}.$$

Beispiel 4. Wenn in demselben Falle die Kraft P gegeben ist, die Kraft Q so zu bestimmen, dass der Hebelarm CA im Gleichgewichte horizontal steht.

In diesem Falle ist $\varphi = o$: also:

$$Pa + Qb\cos\omega = o;\quad Q = -\frac{Pa}{b\cos\omega}.$$

Die Aufgabe ist also nur dann möglich, wenn der Winkel ω größer als ein rechter ist, in welchem Falle $\cos\omega$ negativ und folglich die Kraft Q positiv ist.

Beispiel 5. Die Kraft zu bestimmen, welche erforderlich ist, um ein Wagenrad über ein Hinderniss zu bewegen, wenn vorausgesetzt wird, dass die darauf ruhende Last in der Axe des Rades concentrirt ist.

Es sei A (Fig. 17.) die Axe des Rades und CD das Hinderniss. Soll sich alsdann das Rad über das Hinderniss bewegen, so muß es sich um den Punkt C drehen. Wirkt alsdann die bewegende Kraft in der Richtung AP und die auf dem Rade ruhende Last nach der verticalen Richtung AE, so bildet das Rad gewissermaßen einen Hebel von der in §. 20. Zus. 5. erwähnten Art. Soll nun die Kraft P der Last Q das Gleichgewicht halten, so muß die Proportion stattfinden:

$$P:Q = CN:CM = \sin CAE:\sin CAP,$$

woraus folgt: $$P = Q.\frac{\sin CAE}{\sin CAP}.$$

Die Kraft P ist also am kleinsten, wenn $\sin CAP$ am größten oder der Winkel CAP ein rechter ist, und in diesem Falle ist $P = Q\sin CAE$.

Wenn das Rad größer wird, und das Hinderniss dasselbe bleibt, so bleibt der Sinusversus NE oder CD auch derselbe, und da der Halbmesser größer geworden ist, so ist der Winkel CAE kleiner geworden. Je größer also ceteris paribus das Rad ist, desto kleiner ist die erforderliche Kraft P.

§. 22. Lehrsatz. Wenn eine beliebige Anzahl von Kräften $P, Q, \ldots$ und $P', Q', \ldots$ (Fig. 18.) auf die Arme eines Hebels wirken, denselben nach entgegengesetzten Richtungen zu drehen streben und so beschaffen sind, dass

$$P.CM + Q.CN + \ldots = P'.CM' + Q'.CN' + \ldots$$

ist, so befindet sich der Hebel im Gleichgewichte.

Die Linien $CM, CN, \ldots CM', CN', \ldots$ sind hier die von dem Drehungspunkte C auf die Richtungen der Kräfte gefällten Perpendikel und es wird angenommen, dass der Hebel eine beliebige Anzahl unbiegsamer, auf eine unveränderliche Weise mit einander verbundener Arme habe.

Man ziehe durch C eine horizontale Linie OO' und an OO' lasse man senkrecht auf OO' Kräfte $X, Y, \ldots$ und $X', Y', \ldots$ wir-

ken, welche das ganze System nach entgegengesetzten Richtungen zu drehen streben und so beschaffen sind, dass:

$$X.CO = P.CM,\ Y.CO = Q.CN, \text{ etc.}$$
$$X'.CO' = P'.CM',\ Y'.CO' = Q'.CN', \text{ etc.}$$

also: $X.CO + Y.CO + \text{etc.} = P.CM + Q.CN + \text{etc.}$
$X'.CO' + Y'.CO' + \text{etc.} = P'.CM' + Q'.CN' + \text{etc.}$

ist, so ist nach der Voraussetzung:

$$P.CM + Q.CN + \text{etc.} = P'.CM' + Q'.CN' + \text{etc.},$$

folglich: $X.CO + Y.CO + \text{etc.} = X'.CO' + Y'.CO' + \text{etc.}$

oder: $(X + Y + \text{etc.})\,CO = (X' + Y' + \text{etc.})\,CO'$

und folglich sind nach §. 16. Zus. 3. die resp. in O und O' wirkenden Kräfte $X + Y + \text{etc.}$, $X' + Y' + \text{etc.}$ im Gleichgewichte.

Aber da $X.CO = P.CM$ ist, so hält die Kraft P der Kraft X das Gleichgewicht, und ebenso die Kraft Q der Kraft Y,.... die Kraft P' der Kraft X', die Kraft Q' der Kraft Y',... Folglich halten die Kräfte P, Q,... den Kräften X, Y,.... zusammengenommen das Gleichgewicht, und mithin bringen die Kräfte P, Q,.... zusammengenommen dieselbe Wirkung hervor als die Kräfte X', Y',.... welche den Kräften X, Y,.... zusammengenommen das Gleichgewicht halten. Aber ebenso halten die Kräfte X', Y',... zusammengenommen den Kräften P', Q',... zusammengenommen das Gleichgewicht und folglich halten die Kräfte P, Q,.... den Kräften P', Q',.... das Gleichgewicht.

Zusatz 1. Umgekehrt, wenn die Kräfte P, Q,.... und P', Q', ... einander das Gleichgewicht halten, so ist:

$$P.CM + Q.CN + \ldots = P'.CM' + Q'.CN' + \ldots.$$

Denn wiederholen wir dieselbe Construction, so ergibt sich, dass die Kräfte P, Q,... den Kräften X, Y,.... und die Kräfte P', Q',... den Kräften X', Y',.... das Gleichgewicht halten. Da aber die Kräfte P, Q,... den Kräften P', Q',... das Gleichgewicht halten, so halten folglich auch die Kräfte X, Y,... den Kräften X', Y',.... das Gleichgewicht, und mithin ist:

$$(X + Y + \text{etc.})\,CO = (X' + Y' + \text{etc.})\,CO';$$

aber nach der Voraussetzung ist:

$$X.CO + Y.CO + \text{etc.} = P.CM + Q.CN + \text{etc.},$$

und $X'.CO' + Y'.CO' + \text{etc.} = P'.CM' + Q'.CN' + \text{etc.};$

folglich: $P.CM + Q.CN + \text{etc.} = P'.CM' + Q'.CN' + \text{etc.}$

Zusatz 2. Wenn die Kräfte Gewichte sind, welche in den Punkten M, N,.... M', N',... an einem horizontalen Hebel (Fig. 19.) wirken, so findet das Gleichgewicht statt, wenn:

$$P.CM + Q.CN + \text{etc.} = P'.CM' + Q'.CN' + \text{etc.}$$

ist; denn wenn $P.CM+Q.CN+\text{etc.} \gtrless P'.CM'+Q'.CN'+\text{etc.}$ wäre, so würde der Hebel nach der einen oder andern Richtung gedrehet. Folglich kann die Größe $P.CM+Q.CN+\text{etc.}$ oder $P'.CM'+Q'.CN'$ als das Maß der Stärke oder Energie, mit welcher das System nach der einen oder andern Richtung gedrehet werden soll, betrachtet werden. Eine solche Größe, d. h. die Summe der Producte aus jeder Kraft und ihrer senkrechten Entfernung vom Drehungspunkte in derselben Richtung genommen, wird was Moment dieser Kräfte in Beziehung auf den Drehungspunkt genannt, und das Product einer einzelnen Kraft P mit ihrem Perpendikel CM heißt das Moment dieser Kraft.

§. 23. Beispiel 1. In Fig. 19. seien P, Q, P′, Q′ resp. Gewichte von 3, 5, 7, 9 Pfd. und jede der gleichen Entfernungen MN, NM′, M′N′ gleich 1 Fuß, und man soll den Unterstützungspunkt C bestimmen, für welchen diese Gewichte einander das Gleichgewicht halten.

Es sei $MN=NM'=M'N'=a$ und $MC=x$,

folglich $NC=x-a$, $CM'=2a-x$, $CN'=3a-x$

und folglich nach dem letzten Zusatze:

$$3x+5(x-a)=7(2a-x)+9(3a-x);$$

also: $$x=\frac{5a+7.2a+9.3a}{3+5+7+9}=\frac{46a}{24}=\frac{23a}{12}=23 \text{ Zoll},$$

und C ist um 1 Zoll von M′ entfernt.

Beispiel 2. Man soll zeigen, wie eine Schnellwage eingetheilt wird. Die Schnellwage ist ein Hebel AB (Fig. 20.), welcher um einen Mittelpunkt C beweglich ist, und vermittelst welcher die zu wägenden Substanzen ihrem Gewichte nach durch dasselbe unveränderliche, aber in verschiedene Entfernungen vom Drehungspunkte aufgehangene Gewicht P bestimmt werden. Der zu wägende Körper Q wird nämlich an dem einen Ende B aufgehangen, und das bekannte unveränderliche Gewicht P in eine solche Entfernung von dem Drehungspunkte C gebracht, dass es dem Körper Q das Gleichgewicht hält. Nimmt man nun für den Körper Q successive verschiedene Gewichte, bringt sie mit dem Gewichte P ins Gleichgewicht und setzt an die Stelle des Hebelarmes AC, wo sich letzteres gerade befindet, die Zahl, welche das zugehörige Gewicht von Q ausdrückt; so wird auf diese Weise die Schnellwage eingetheilt.

Wir wollen nun annehmen, dass der Hebel ein bestimmtes Gewicht hat, und dass der längere Hebelarm CA schwerer ist als der andere, und endlich, dass, wenn P und Q hinweggenommen werden,

ein in D wirkendes Gewicht P den Hebelarm oder Wagebalken horizontal hält. Wenn wir alsdann CO = CD nehmen, so ist klar, daß der ganze Wagebalken AB dieselbe Wirkung hervorbringt als ein in O befindliches Gewicht P, weil beide einzeln dem in D befindlichen Gewichte P das Gleichgewicht halten. Nun halte das Gewicht P in M dem Gewichte Q in B das Gleichgewicht, so hält folglich Q dem Gewichte P in M nebst der Wirkung des Wagebalkens, d. h. einem Gewichte, welches dieselbe Wirkung als P in O hervorbringt, das Gleichgewicht; also ist:

$$Q.CB = P.CM + P.CO = P.CM + P.CD = P.DM.$$

Wenn wir also DE = CB, DF = 2CB, DG = 3CB etc. machen, so ist, wenn P sich in E, F, G,.... befindet, resp. Q = P, Q = 2P, Q = 3P,.... Der Wagebalken ist also eingetheilt, wenn man an die Punkte E, F, G,... noch die Zahlen 1, 2, 3,.... setzt.

§. 24. Die Betrachtungen in diesem Kapitel sind auch noch anwendbar, wenn die auf den Hebelarm wirkenden Kräfte, statt alle in derselben Ebene zu liegen, in beliebigen auf der Drehungsaxe des Hebels senkrechten Ebenen liegen, und alsdann müssen die in diesen Ebenen von der Axe auf die Richtungen der Kräfte gefällten Perpendikel statt der Perpendikel CM, CN,.... genommen werden.

Der Haspel bietet ein Beispiel von den auf diese Art wirkenden Kräften dar.

Zweites Kapitel.

Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte.

§. 25. Nachdem wir die Wirkung verschiedener Kräfte und ihr Gleichgewicht am Hebel betrachtet haben, wollen wir untersuchen, welche Wirkung zwei oder mehrere nach verschiedenen Richtungen auf einen Punkt wirkende Kräfte hervorbringen. Wenn zwei Kräfte auf einen Punkt wirken, wie z. B. die nach den Richtungen BQ und BR (Fig. 1.) wirkenden Kräfte, so bringen sie dieselbe Wirkung hervor, wie eine einzelne Kraft, welche nach einer mittlern Richtung BS wirkt. In diesem Falle wird die nach der Richtung BS wirkende Kraft die *Mittelkraft* oder *Resultante* der nach den Richtungen BQ und BR wirkenden Kräfte genannt, und diese letztern nennt man die *Seitenkräfte* oder *Componenten* der nach der Richtung BS wirkenden Kraft.

Wenn zwei Kräfte nach derselben Richtung wirken, so ist die vereinigte Wirkung derselben der *Summe* der Kräfte gleich. Wenn z. B. eine Kraft von 2 Pfd. und eine andere von 3 Pfd. auf den-

selben Punkt und nach derselben Richtung wirken, so wird dieser Punkt mit einer Kraft von 5 Pfd. gezogen. Desgleichen, wenn zwei Kräfte nach entgegengesetzten Richtungen auf denselben Punkt wirken; so ist die Mittelkraft der Differenz beider Kräfte gleich, und wirkt nach der Richtung der größern Kraft. Wenn z. B. auf einen Punkt nach einer bestimmten Richtung eine Kraft von 7 Pfd. und nach der gerade entgegengesetzten Richtung zugleich eine Kraft von 4 Pfd. wirkt, so wird er nach der ersten Richtung mit einer Kraft von 3 Pfd. gezogen; denn die Kraft von 7 Pfd. kann als aus zwei Kräften von resp. 4 und 3 Pfd. zusammengesetzt betrachtet werden, wovon die Kraft von 4 Pfd. durch die gerade entgegengesetzte Kraft von derselben Größe aufgehoben wird, so dass blos die Kraft von 3 Pfd. wirksam bleibt.

§. 26. Lehrsatz. Wenn zwei beliebige Kräfte auf denselben Punkt wirken, so wirkt die Mittelkraft derselben nach der Diagonale des Parallelogrammes, dessen Seiten, die beiden ersten Kräfte der Größe und Richtung nach ausdrücken.

Die Linien Ap, Aq (Fig. 21.) mögen die Kräfte P, Q der Größe und Richtung nach ausdrücken, man vollende das Parallelogramm ApCq, ziehe die Diagonale AC, und fälle aus dem Punkte C auf die Verlängerungen von Ap und Aq die Perpendikel CM, CN. Alsdann wollen wir CA als einen um den festen Punkt C beweglichen Hebel betrachten, auf welchen nach den Richtungen Ap, Aq die Kräfte P, Q wirken. Die Dreiecke CpM, CqN sind in M und N rechtwinklig und außerdem ist $\angle CpM = qAp = CqN$; folglich sind sie einander ähnlich, und man hat die Proportion:

$CM:CN = Cp:Cq = Aq:Ap = Q:P$ nach der Voraussetzung. Folglich verhalten sich die Kräfte P und Q umgekehrt wie die aus dem Drehungspunkte C auf ihre Richtungen gefällten Perpendikel CM, CN und der Hebel CA ist mithin unter ihrer Wirkung im Gleichgewichte (§. 20. Zus. 5.). Und da die Mittelkraft der beiden Kräfte P und Q dieselbe Wirkung hervorbringen muss, als sie vereinigt, so muss auch diese Mittelkraft den Hebel CA in Ruhe erhalten. Nun kann aber eine einzelne Kraft den Hebel CA nur dann in Ruhe erhalten, wenn sie nach der Richtung AC wirkt.*) Denn wenn sie mit CA auf der einen oder andern Seite einen Winkel bildete, so würde sie

*) Wenn die Mittelkraft nach entgegengesetzter Richtung CA wirkte, so bliebe zwar der Hebel in Ruhe, aber alsdann könnte sie offenbar nicht der vereinten Wirkung der Kräfte AP, AQ gleich sein, weil diese unterhalb des Punktes C einen Winkel einschließen.

den Hebel CA nach der einen oder andern Richtung um den Punkt C drehen. Die Mittelkraft wirkt also nach der Richtung AC, d. h. nach der Richtung der Diagonale des Parallelogrammes, dessen Seiten Ap, Aq die Kräfte P, Q ausdrücken.

Zusatz 1. Wenn auf einen Punkt C zwei Kräfte Ap, Aq wirken, und er durch eine dritte Kraft im Gleichgewichte erhalten wird, so muss diese letztere nach der Richtung CA wirken.

Zusatz 2. Wenn also drei Kräfte auf einen Punkt wirken und einander das Gleichgewicht halten, so muss jede derselben nach der Richtung der Diagonale des Parallelogrammes wirken, dessen Seiten die beiden andern Kräfte ausdrücken.

§. 27. Lehrsatz. Wenn zwei beliebige Kräfte auf denselben Punkt wirken, so wird die Mittelkraft derselben der Größe nach durch die Diagonale des Parallelogrammes ausgedrückt, dessen Seiten die beiden ersten Kräfte der Größe und Richtung nach ausdrücken.

Die Linien Ap, Aq (Fig. 22.) sollen die beiden Seitenkräfte der Größe und Richtung nach ausdrücken, und wir wollen das Parallelogramm Apqr vollenden, so wird nach Zus. 2. des vorhergehenden §. den beiden Kräften Ap, Aq durch eine nach der Richtung rA wirkende Kraft das Gleichgewicht gehalten. Die Linie Ay stelle diese Kraft der Größe nach dar, und wir wollen das Parallelogramm Apxy ergänzen. Da die Kräfte Ap, Aq, Ay einander das Gleichgewicht halten, so können wir annehmen, dass die Kraft Aq den beiden Kräften Ap, Ay das Gleichgewicht hält. Folglich wirkt die Kraft Aq nach dem vorhergehenden §. nach der Richtung der Diagonale des Parallelogrammes py und xAq ist eine gerade Linie. Folglich sind in den Dreiecken xAy, qAr die Winkel xAy, qAr und wegen der Parallellinien auch die Winkel xyA, Arq einander gleich, und folglich die Dreiecke gleichwinklig. Ferner ist wegen der Parallelen qr = Ap = yx; folglich die Dreiecke xAy, qAr einander gleich und Ay = Ar, d. h. die Kraft Ay wird der Größe nach durch die Diagonale Ar ausgedrückt. Aber Ap, Aq halten Ay das Gleichgewicht; folglich hält auch ihre nach Ar wirkende Mittelkraft der Kraft Ay das Gleichgewicht und ist mithin dieser gleich. Also wird die Mittelkraft der Größe nach durch die Diagonale Ar ausgedrückt.

Zusatz. Wenn die Seitenkräfte durch die Seiten eines Parallelogrammes ausgedrückt werden, so wird ihre Mittelkraft der Größe und Richtung nach durch die Diagonale desselben ausgedrückt.

§. 28. Lehrsatz. Kräfte können durch Linien ausgedrückt

werden, welche zu ihren Richtungen parallel und ihnen der Größe nach proportional sind.

Denn die Richtung einer zur Richtung einer Kraft parallelen Linie ist dieselbe als die der Kraft selbst, und folglich wird die Kraft genau der Größe und Richtung nach auf diese Weise ausgedrückt.

Zusatz 1. Wenn die Linien AB, BC (Fig. 23.) zwei Kräfte ausdrücken, so drückt die Linie AC ihre Mittelkraft aus; denn wenn man das Parallelogramm ABCD vollendet, so ist die durch BC ausgedrückte Kraft dieselbe als die durch AD ausgedrückte, und da AC die Mittelkraft aus AB und AD ist, so ist sie auch die Mittelkraft aus AB und BC.

Zusatz 2. Wenn zwei Kräfte durch zwei Seiten eines Dreieckes ausgedrückt werden, z. B. durch AB und AD, so wird ihre Mittelkraft gefunden, wenn man das Doppelte der Linie nimmt, die die gemeinschaftliche Winkelspitze A der beiden Seiten AB, AD mit der Mitte der gegenüberliegenden Seite verbindet. Denn wenn man das Parallelogramm vollendet, so theilen sich seine Diagonalen gegenseitig in zwei gleiche Theile, und folglich ist $AC = 2AE$.

Zusatz 3. Wenn die Kräfte, welche der Größe und Richtung nach durch die drei Seiten eines Dreieckes ausgedrückt werden, auf einen Punkt wirken, so bleibt derselbe in Ruhe. Es sei ABC (Fig. 23.) das Dreieck, so drückt AC die Mittelkraft aus AB und BC aus (Zus. 1.); folglich sind die drei Kräfte AB, BC, CA an Wirkung den beiden Kräften AC, CA gleich, und halten folglich den Punkt im Gleichgewichte oder in Ruhe.

Zusatz 4. Umgekehrt, wenn drei Kräfte nach den Richtungen der Seiten eines Dreieckes auf einen Punkt wirken und denselben in Ruhe erhalten, so werden sie der Größe nach durch die Seiten des Dreieckes ausgedrückt. Denn wenn eine dieser Kräfte, z. B. die nach der Richtung BC wirkende, nicht durch BC ausgedrückt würde, so werde sie durch BC′ ausgedrückt. Alsdann sind die beiden Kräfte AB, BC′ der Kraft AC′ an Wirkung gleich und können folglich der nach der Richtung CA wirkenden Kraft nicht das Gleichgewicht halten, welches gegen die Voraussetzung ist.

Zusatz 5. Wenn man also die Richtungen dreier einander das Gleichgewicht haltenden Kräfte kennt, so findet man ihre relativen Größen, wenn man ein Dreieck construirt, dessen drei Seiten zu diesen Richtungen parallel sind; denn alsdann stehen diese Seiten offenbar in demselben Verhältniss, als die Kräfte.

Zusatz 6. Wenn drei Kräfte einen Punkt im Gleichgewicht halten, und drei gerade Linien gezogen werden, welche mit den Rich-

tungen der Kräfte nach derselben Seite hin gleiche Winkel bilden, so bilden diese drei geraden Linien ein Dreieck, dessen Seiten die relative Stärke der drei Kräfte ausdrücken.

Es seien AB, BC, CA (Fig. 24 und 25.) die Richtungen der Kräfte und DM, EN, FO drei gerade Linien von solcher Beschaffenheit, dass die Winkel ADM, BEN, CFO einander gleich sind, so bilden diese nöthigenfalls verlängerten geraden Linien ein Dreieck abc. In den Dreiecken aEM, ADM sind die Winkel aME, AMD und nach der Voraussetzung aEM oder BEN und ADM einander gleich und folglich ist der dritte Winkel MaE oder bac gleich MAD oder BAC. Ebenso ist der Winkel abc = ABC und bca = BCA. Folglich sind die Dreiecke ABC und abc gleichwinklig, und man hat folglich die Proportion:

$$ab : bc = AB : BC$$

und nach Zusatz 4.

ab : bc = nach AB wirk. Kraft : nach BC wirk. Kraft,

und ebenso für ca. Wenn also ab die nach der Richtung AB wirkende Kraft ausdrückt, so drücken bc, ca die nach den Richtungen BC, CA wirkenden Kräfte aus.

Zusatz 7. Wenn drei Kräfte einen Punkt im Gleichgewichte halten, so verhalten sich je zwei derselben, wie die Sinus der Winkel, welche ihre Richtungen mit der Richtung der dritten Kraft bilden.

Es seien P, Q, R, drei Kräfte, welche nach den Richtungen Ap, Aq, Ay (Fig. 22.) auf den Punkt A wirken und denselben im Gleichgewichte erhalten. Man verlängere yA und ziehe pr parallel zu Aq, so verhalten sich die Linien Ap, pr und rA wie die Kräfte (Zus. 4.). Nun hat man aber:

$$P : Q = Ap : pr = \sin Arp : \sin pAr$$
$$= \sin qAr : \sin pAr$$
$$= \sin qAy : \sin pAy;$$

ebenso hat man:

$$R : P = \sin qAp : \sin yAq$$

und

$$Q : R = \sin yAp : \sin qAp.$$

Zusatz 8. Wenn der Winkel zwischen den Richtungen zweier Kräfte abnimmt, so nimmt ihre Mittelkraft zu.

Es seien Ap, Aq (Fig. 26.) zwei Kräfte, deren Richtungen den Winkel pAq mit einander bilden, und pr gleich und parallel Aq, so ist Ar die Mittelkraft. Ferner seien Ap, AQ dieselben Kräfte, deren Richtungen den Winkel pAQ bilden, und pR sei gleich und parallel AQ, so ist AR die Mittelkraft. Alsdann ist pR = pr, und

wenn der Winkel $pAQ < pAq$ ist, so ist $ApR > Apr$, und folglich $AR > Ar$.

§. 29. Beispiele von der Zusammensetzung der Kräfte bieten folgende Fälle dar.

Gesetzt, ein Boot wäre vermittelst eines Seiles an einem festen Punkte befestigt und es wirkten auf dasselbe zugleich der Wind und der Strom, so zeigte die Richtung des Seiles die Richtung der Mittelkraft aus der Wirkung des Windes und der des Wassers.

Es seien BQ, BR (Fig. 1.) die Richtungen zweier Kräfte, welche auf den Punkt B wirken und einen rechten Winkel mit einander bilden und die nach diesen Richtungen wirkenden Kräfte seien resp. gleich **48** und **20** Pfd., und man soll die Größe und Richtung der Mittelkraft finden.

Wenn wir den rechten Winkel BRS construiren und $BR = 48$, $RS = 20$ nehmen, so ist BS die Mittelkraft; und $BS^2 = 48^2 + 20^2 = 2704$, und folglich die Mittelkraft $SB = 52$ Pfd.

Zur Bestimmung des Winkels SBR haben wir $\sin SBR = \frac{20}{52} = \frac{5}{13}$ und Winkel $SBR = 22^0\ 37'$ näherungsweise.

Es kommen viele Beispiele der Zerlegung der Kräfte vor, wo die ausgeübte Kraft sich in zwei andere zerlegt, wovon die eine auf irgend eine Weise aufgehoben wird, und die andere allein wirksam bleibt. Wenn man z. B. einen Körper vermittelst eines daran befestigten und unter einem Winkel von 45^0 gegen den Horizont geneigten Seiles auf horizontalem Boden fortzieht, so ist die wirksame Zugkraft nur ein Theil der ausgeübten Kraft. Wenn z. B. die wirklich ausgeübte Kraft **17** Pfd. beträgt, so wird sie in zwei gleiche Kräfte zerlegt, wovon die eine nach horizontaler und die andere nach verticaler Richtung wirkt, und wenn jede derselben mit x bezeichnet wird, so ist:

$$x^2 + x^2 = 17^2, \text{ also ungefähr } x = \frac{17}{\sqrt{2}} = 12.$$

Folglich ist die Kraft, welche den Körper in horizontaler Richtung fortzieht, ungefähr $= 12$ Pfd.

§. 30. Aufgabe. Die Mittelkraft aus einer beliebigen Anzahl von Kräften AB, Ac, Ad, Ae,.... (Fig. 27.) zu finden, welche in derselben Ebene liegen und auf denselben Punkt A wirken.

Auflösung. Man vollende das Parallelogramm Bc und ziehe die Diagonale AC, hierauf das Parallelogramm Cd und ziehe die Diagonale AD; dann das Parallelogramm De und ziehe die Diago-

nale AE u. s. f.; so ist AB, Ac gleichbedeutend mit AC; AB, Ac, Ad von gleicher Wirkung mit AC, Ad oder mit AD; ferner AB, Ac, Ad, Ae gleichgeltend mit AD, Ae oder mit AE u. s. f.

Zusatz 1. Wenn irgend eine Anzahl von Kräften durch die Seiten eines Vieleckes, wie AB, BC, CD, DE,.... der Reihe nach ausgedrückt werden, so wird ihre Mittelkraft durch die Linie AE ausgedrückt, welche das Vieleck ergänzt (§. 28.)

Zusatz 2. Eine Anzahl von Kräften, welche auf einen Punkt wirken und der Reihe nach durch die Seiten AB, BC, CD, DE, EA ausgedrückt werden, halten denselben im Gleichgewichte. Denn die Kräfte AB, CD, DE sind gleichgeltend mit AE; folglich AB, BC, CD, DE, EA gleichgeltend mit AE, EA, welche einander offenbar das Gleichgewicht halten.

Zusatz 3. Bei mehr als drei Kräften folgt aber nicht umgekehrt, dass, wenn sie nach den Richtungen der Seiten eines Vieleckes wirken und im Gleichgewichte sind, sie auch diesen Seiten proportional sein müssen; denn indem die Richtungen der Seiten dieselben bleiben, kann doch ihr Verhältniss ein anderes sein. Zieht man z. B. die Linie D′E′ parallel zu DE, so halten die Kräfte, welche nach den Seiten des Vieleckes ABCD′E′ wirken und denselben proportional sind, einander das Gleichgewicht, sowohl als wenn sie den Seiten des Vieleckes ABCDE proportional sind.

§. 31. Aufgabe. Die Mittelkraft von Kräften zu finden, welche auf denselben Punkt wirken, aber nicht in derselben Ebene liegen.

Auflösung. Es seien AB, AC, AD (Fig. 28.) drei auf denselben Punkt A wirkende, aber nicht in derselben Ebene liegende Kräfte. Man lege die Ebenen BC, BD, CD und die zu ihnen parallelen Ebenen DG, CG, BG, welche das Parallelepipedum ABCD.... ergänzen, und ziehe AF, DG, so ist DF offenbar ein Parallelogramm und AB, AC gleichgeltend mit AF (§. 27.) und AB, AC, AD gleichgeltend mit AF, AD, d. h. mit AG. Wenn also die in derselben Ecke zusammenstoßenden Kanten eines Parallelepipedums die Seitenkräfte ausdrücken, so stellt die Diagonale desselben die Mittelkraft dar.

Zusatz 1. Wenn ABEG eine vierseitige Figur ist, deren Seiten nicht alle in derselben Ebene liegen, und die Seiten AB, BE, EG drücken drei Kräfte aus, so drückt AG ihre Mittelkraft aus.

Zusatz 2. Wenn auf einen Punkt vier Kräfte wirken, welche der Reihe nach durch die Seiten einer vierseitigen Figur ausgedrückt werden, so halten sie den Punkt im Gleichgewichte.

Zusatz 3. Wenn irgend eine Anzahl von Kräften der Reihe nach durch die Seiten eines nicht in derselben Ebene liegenden Vieleckes

ausgedrückt werden, so wird ihre Mittelkraft durch die gerade Linie ausgedrückt, welche das Vieleck ergänzt.

Zusatz 4. Wenn irgend eine Anzahl von Kräften der Reihe nach durch die Seiten eines Vieleckes ausgedrückt werden, und auf denselben Punkt wirken, so erhalten sie denselben im Gleichgewichte.

Die drei letzten Zusätze werden durch den gegenwärtigen §. ebenso bewiesen, wie die in §. **30.** durch diesen §.

§. **32.** Vermittelst der vorhergehenden Sätze können wir die Bedingungen finden, unter welchen ein Punkt, auf den mehrere Kräfte wirken, im Gleichgewichte bleibt, wie aus den folgenden Aufgaben erhellen wird.

Aufgabe **1.** Es seien **A, B** (Fig. **29.**) zwei in derselben Horizontale liegende Punkte und **AC, BC** zwei Schnüre, vermittelst welcher an dem Punkte **C** das Gewicht **W** aufgehangen ist. Man soll die Kräfte bestimmen, welche die Schnüre **CA, CB** ausüben.

Der Punkt, an welchem in diesem Falle das Gleichgewicht stattfindet, ist **C**, und die Kräfte, welche es hervorbringen, sind die nach der Richtung der Schnüre **CA, CB** wirkenden Kräfte und das nach der Richtung **CW** wirkende Gewicht. Von irgend einem Punkte **d** der Verlängerung der Verticallinie **WC** ziehe man **db, da** parallel zu **CA, CB**. Soll nun die Mittelkraft aus den beiden an den Schnüren **CA, CB** wirkenden Kräften dem Gewichte **W** das Gleichgewicht halten, so muss sie nach der Richtung **Cd** wirken und diesem Gewichte **W** gleich sein. Diese Kräfte müssen sich also wie **Ca, Cb** verhalten, und ihre Mittelkraft wird alsdann durch **Cd** ausgedrückt (§. **27.**). Wenn also **Cd** das Gewicht **W** ausdrückt, so werden die nach den beiden Schnüren wirkenden Kräfte durch **Ca, Cb** ausgedrückt. Werden also die an diesen Schnüren wirkenden Kräfte durch **P, Q** bezeichnet, so haben wir:

$$\frac{P}{W} = \frac{Ca}{Cd} = \frac{\sin Cda}{\sin Cad} = \frac{\sin dCb}{\sin aCb} = \frac{\sin DCB}{\sin ACB}$$

und auf ähnliche Weise: $\frac{Q}{W} = \frac{\sin DCA}{\sin ACB}$,

woraus sich **P** und **Q** ergibt.

Zusatz **1.** Die an den Schnüren wirkenden Kräfte messen ihre Spannungen (§. **10.**) und diese werden durch die auf die festen Punkte **A, B** ausgeübten Druckkräfte gemessen. Aber wenn man statt der festen Punkte **A, B** zwei Rollen annimmt, über welche die Schnüre mit den Gewichten **P** und **Q** gehen, so werden dieselben durch das Gewicht **W** genau im Gleichgewicht erhalten (§. **8.**).

Aufgabe 2. Wenn zwei Schnüre CAP, CBQ (Fig. 30.) über die in derselben Horizontale liegenden Rollen A und B gehen und ein Gewicht W mittelst zwei gleicher an ihren andern Enden aufgehangener Gewichte tragen; die Gleichgewichtslage des Punktes C zu finden.

Auflösung. Man ziehe die Linien da, db wie in der vorhergehenden Aufgabe und Cd schneide AB in E, so verhalten sich die Gewichte W, P, Q nach dem letzten Zusatze, wie Cd, Ca, Cb, und da die Gewichte P und Q einander gleich sind, so ist Ca = Cb = ad, also Winkel aCd = Cda = dCb; folglich sind die Dreiecke ACE und BCE einander gleich und mithin AE = EB. Der Punkt E ist also die Mitte von AB und der Punkt C liegt in der durch E gehenden Verticallinie. Zieht man ferner die Linie ab, welche Cd in e schneidet, so sind aeC, AEC rechte Winkel und wegen der ähnlichen Dreiecke hat man:

$$\frac{P}{W} = \frac{Ca}{Cd} = \frac{Ca}{2Ce} = \frac{CA}{2CE}.$$

Nun sei $AE = EB = a$, $EC = x$, so ist $Ca = (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$,

und $$\frac{P}{W} = \frac{(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}{2x},$$

folglich: $$\frac{4P^2}{W^2}x^2 = a^2 + x^2, \quad \frac{4P^2 - W^2}{W^2}x^2 = a^2,$$

woraus $$x = \frac{Wa}{(4P^2 - W^2)^{\frac{1}{2}}}$$

folgt, und also die Lage des Punktes C bekannt ist.

Zusatz 1. Soll x möglich sein, so muss die Größe unter dem Wurzelzeichen positiv sein, und folglich:

$$W^2 < 4P^2 \text{ oder } W < 2P.$$

Wenn das Gewicht $W \geqq 2P$ ist, so sinkt es herab, indem es die beiden andern Gewichte aufwärts zieht und kann an keiner Stelle in Ruhe bleiben.

Zusatz 2. Soll die Schnur ACB eine horizontale gerade Linie bilden, so muss $x = 0$ oder:

$$\frac{Wa}{(4P^2 - W^2)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

sein, welches nur der Fall sein kann, wenn entweder W unendlich klein oder P unendlich groß ist, d. h. zwei Gewichte P und Q, wie groß sie auch sein mögen, können ein Gewicht W nie so stark aufwärts ziehen, dass die Schnur ACB, woran W hängt, eine hori-

zontale Linie bildet. Dasselbe gilt von einer schweren Schnur; denn man kann sich ihr Gewicht in ihrer Mitte vereinigt denken.

Aufgabe 3. Die Lage C des Gleichgewichtes zu bestimmen, wenn die Kräfte P, Q (Fig. 31.) beliebige Werthe und die Rollen A, B eine beliebige Lage haben.

Es sei wie vorhin, Cd vertical, db parallel zu AC und da parallel zu BC, so verhalten sich P, Q, W wie die Linien Ca, ad, dC. Wir haben also in dem Dreiecke Cad aus dem bekannten Verhältnisse der drei gegebenen Seiten die Winkel aCd, Cda zu finden.

Ferner ist
$$BAC = BAP - CAP = BAP - aCd,$$
$$ABC = ABQ - CBQ = ABQ - bCd$$
$$= ABQ - Cda.$$

Wenn wir also die Lage der Punkte A, B und folglich die Winkel BAP, ABQ kennen, so kennen wir auch die Winkel BAC, ABC, und da wir auch die Seite AB kennen, so brauchen wir nur das Dreieck ABC aufzulösen, um die Lage von C zu bestimmen.

Aufgabe 4. Es sei ACDEB (Fig. 32.) eine an ihren Enden A, B befestigte Schnur, welche durch die in den Punkten C, D, E daran aufgehangenen Gewichte P, Q, R in einer gegebenen Lage erhalten wird; man soll die Gewichte P, Q, R mit einander vergleichen.

Die Winkel, welche die Polygonseiten AC, CD, DE, EB mit einer horizontalen Linie bilden, wollen wir mit $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ bezeichnen, so sieht man leicht ein, dass, wenn man AC nach c, CD nach d,.... verlängert, $DCc = \beta - \gamma$, $EDd = \gamma - \delta$, etc. ist.

Der Punkt C wird durch drei Kräfte in Ruhe erhalten, nämlich durch das Gewicht P, die Spannung von CA und die Spannung von CD, und wenn wir die letztern mit C bezeichnen, so haben wir nach §. 28. Zus. 7.

$$\frac{P}{C} = \frac{\sin ACD}{\sin ACP} = \frac{\sin DCc}{\sin ACx}$$
$$= \frac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta} = \frac{\sin\beta\cos\gamma - \cos\beta\sin\gamma}{\cos\beta}$$
$$= \cos\gamma\,(\operatorname{tang}\beta - \operatorname{tang}\gamma).$$

Ebenso wird der Punkt D durch drei Kräfte, nämlich durch das Gewicht Q, die Spannung von DE und die von CD in Ruhe erhalten, und die letztere, welche wir mit D bezeichnen wollen, ist dieselbe als C, weil im Gleichgewichtszustande der Schnur CD die an ihren Enden wirkenden Spannkräfte gleich und entgegengesetzt sein müssen. Es ist daher:

$$\frac{Q}{C} = \frac{\sin(\gamma - \delta)}{\cos\delta} = \frac{\sin\gamma\cos\delta - \cos\gamma\sin\delta}{\cos\delta}$$
$$= \cos\gamma(\text{tang}\,\gamma - \text{tang}\,\delta)$$

und folglich $\frac{Q}{P} = \frac{\text{tang}\,\gamma - \text{tang}\,\delta}{\text{tang}\,\beta - \text{tang}\,\gamma}$.

Auf ähnliche Weise ergibt sich das Verhältniss der an den übrigen Winkelspitzen des Vieleckes wirkenden Gewichte, und sie sind folglich dem Unterschiede der Tangenten der Winkel proportional, welche die sie tragenden Schnurstücke mit dem Horizonte bilden.

Wenn eins der Schnurstücke, z. B. EB mit dem weiter von dem Anfangspunkte A entfernten Ende höher liegt, so muß der ihm entsprechende Winkel ε negativ genommen werden und es ist immer, da $-\text{tang}\,\varepsilon$ eine positive Größe ist:

$$\frac{Q}{R} = \frac{\text{tang}\,\gamma - \text{tang}\,\delta}{\text{tang}\,\delta - \text{tang}\,\varepsilon}.$$

Zusatz. Wenn die Kräfte P, Q, R statt parallel zu sein, beliebige Winkel mit einander bildeten, so müsste man, um sie mit einander zu vergleichen, den Zus. 7. in §. 28. anwenden.

Eine Schnur, welche auf diese Weise im Gleichgewichte erhalten wird, nennt man ein Seilpolygon.

Aufgabe 5. An einer, über einen festen Punkt A (Fig. 33.) gehenden Schnur wirken nach verschiedenen Richtungen zwei Kräfte P, Q; man soll den auf diesen Punkt ausgeübten Druck bestimmmen.

Zunächst ist einleuchtend, dass die Kräfte P und Q nothwendig einander gleich sein müssen; denn da sich die Schnur frei über den Punkt A hinwegbewegen kann, so halten die beiden Kräfte einander ganz auf dieselbe Weise das Gleichgewicht, als wenn sie an den beiden Enden einer geradlinigen Schnur wirkten, wo sie einander gleich sein müssen, wenn das Gleichgewicht stattfinden soll. Wenn wir nun den Punkt A statt als völlig unbeweglich, nur durch eine Kraft AR an seiner Stelle erhalten annehmen, so muss dieselbe nebst den Kräften AP und AQ das Gleichgewicht an dem Punkte A hervorbringen. Wenn wir also RA bis zu irgend einem Punkte r verlängern und rp parallel zu AQ ziehen, so sind die Linien Ap, pr, rA nach §. 28. den nach den Richtungen AP, AQ und AR wirkenden Kräften proportional. Nun haben wir aber eben gesehen, dass die nach AP und AQ wirkenden Kräfte einander gleich sind; folglich ist auch Ap = pr, und Winkel rAp = Arp = rAQ. Die Linie Ar theilt also den Winkel PAQ in zwei gleiche Theile, und wenn po senkrecht auf Ar ist, so hat man:

$$Ar = 2Ao = 2Ap\cos pAr = 2Ap\cos\tfrac{1}{2}PAQ.$$

Setzen wir also jede der beiden Kräfte P, Q gleich P, die nach AR wirkende Kraft = R und Winkel PAQ = A, so haben wir

$$\frac{R}{P} = \frac{Ar}{Ap} = \frac{2\,Ap\cos\frac{1}{2}A}{Ap} = 2\cos\tfrac{1}{2}A.$$

folglich $$R = 2P\cos\tfrac{1}{2}A,$$

und die Kraft R, welche den Punkt A in Ruhe erhält, ist offenbar dem Drucke gleich, welchen die Schnur PAQ auf diesen Punkt ausübt.

Zusatz 1. Wenn A statt ein fester Punkt, eine Rolle ist (Fig. 34.), über welche die Schnur geht, so ist der Druck auf die Rolle nichts anders als der auf ihren Mittelpunkt ausgeübte Druck. Denn in diesem Falle berühren die Schnüre aP, bQ den Umfang abd der Rolle und schneiden sich, wenn sie verlängert werden, in einem Punkte der Linie CA, welche durch den Mittelpunkt der Rolle geht, und gleiche Winkel mit ihnen bildet. Demnach geht die Mittelkraft aus den Spannkräften in aP, bQ durch den Mittelpunkt der Rolle, und ist wie vorhin $= 2P\cos\frac{1}{2}A$.

Zusatz 2. Wenn eine Schnur über irgend eine Anzahl fester Punkte A, B, C, D, ... geht, und durch zwei nach entgegengesetzten Richtungen ziehende Kräfte oder Gewichte P, Q im Gleichgewichte erhalten wird, so müssen diese Kräfte oder Gewichte einander gleich sein, und der Druck auf irgend einen der Punkte, z. B. auf B ist gleich $2P\cos\frac{1}{2}ABC$.

Aufgabe 4. Ein gegebenes Gewicht W (Fig. 35.) wird von zwei auf einer Horizontalebene AB ruhenden Stützen AC, BC getragen; man soll den auf jede Stütze ausgeübten Druck bestimmen, wenn ihre Längen und die gegenseitige Entfernung ihrer untern Enden gegeben sind.

Wenn Cd das Gewicht des Körpers ausdrückt, und da parallel zu BC gezogen wird, so drücken die Linien Ca, ad die Druckkräfte aus (§. 31.). Aber um dem Leser auf die Auflösung der folgenden Aufgaben vorzubereiten, wollen wir diese Druckkräfte durch ein anderes Verfahren bestimmen.

Die Reactionen der Stützen in den Richtungen AC, BC wollen wir mit P, Q bezeichnen (§. 10.) und P werde nach den horizontalen und verticalen Richtungen AD, DC zerlegt, so ist:

$$\frac{\text{Horizont. Theil von P}}{P} = \frac{AD}{AC} = \cos A$$

$$\frac{\text{Vertical. Theil von P}}{P} = \frac{DC}{AC} = \sin A,$$

und ebenso für Q. Es ist also:

Horizont. Kraft von AC in $C = P \cos A$; von BC $= Q \cos B$

Vertical. Kraft von AC in $C = P \sin A$; von BA $= Q . \sin B$,

und da diese Kräfte das Gewicht tragen, so müssen die horizontalen Theile einander gegenseitig aufheben und die verticalen Theile zusammengenommen $= W$ sein. Man hat also die Gleichungen:

$$P \cos A = Q \cos B,$$

$$P \sin A + Q \sin B = W.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $Q = \frac{P \cos A}{\cos B}$, und wenn man in die zweite substituirt, so hat man:

$$P \sin A + \frac{P \cos A}{\cos B} \sin B = W,$$

$$P (\sin A \cos B + \cos A \sin B) = W \cos B$$

oder $$P . \sin (A + B) = W \cos B;$$

oder $$P \sin C = W \cos B$$

und $$P = \frac{W \cos B}{\sin C}.$$

Ebenso ergibt sich $$Q = \frac{W \cos A}{\sin C}.$$

Da sich nun cos A, cos B, cos C durch AC, BC, AB ausdrücken lassen, so können wir auch die Kräfte oder Reactionen P, Q erhalten, und die Druckkräfte auf die Stützen sind den Reactionen dieser gleich.

Zusatz 1. Wenn wir AC, BC, AB resp. mit a, b, c bezeichnen, so haben wir:

$$\cos B = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\sin C = \frac{c \sqrt{(2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - a^4 - b^4 - c^4)}}{2ab},$$

also $$P = \frac{W a . (b^2 + c^2 - a^2)}{c \sqrt{(2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - a^4 - b^4 - c^4)}}$$

und $$Q = \frac{W . b . (a^2 + c^2 - b^2)}{c \sqrt{(2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - a^4 - b^4 - c^4)}}.$$

Zusatz 2. Die Stützen üben in A und B auf die Horizontalebene Druckkräfte aus, welche den auf sie an ihren obern Enden ausgeübten Druckkräften gleich sind, und wenn wir dieselben senkrecht und parallel zu der Ebene zerlegen, so ist der senkrecht darauf wirkende Theil

$$\text{in } A = \frac{W \cos B \sin A}{\sin C}, \text{ und in } B = \frac{W \cos A . \sin B}{\sin C},$$

und beide werden durch die Rückwirkung der Ebene aufgehoben. Der zu der Ebene parallele Theil ist

$$\text{in } A = \frac{W \cos B . \cos A}{\sin C}, \text{ und in } B = \frac{W . \cos A . \cos B}{\sin C}$$

und wenn sie nicht aufgehoben werden, so bewirken sie das Fortgleiten der Stützen auf der horizontalen Ebene nach entgegengesetzten Richtungen von den Punkten A und B aus. Im Allgemeinen müssen sie durch Hindernisse aufgehoben werden; aber zuweilen ist auch schon die Reibung auf der Ebene hinreichend, um sie aufzuheben.

Aufgabe 7. Wenn ein Gewicht W auf drei auf einer Horizontalebene ABC stehenden Stützen AW, BW, CW ruhet, und die Längen dieser Stützen, so wie die gegenseitigen Entfernungen ihrer untern Enden gegeben sind, den Druck auf jede derselben zu finden.

Auflösung. Auf die Horizontalebene fälle man das Perpendikel WO, ziehe die Linie AO, verlängere sie bis zum Durchschneiden mit BC in K und ziehe WK. Der Druck der drei Stützen nach ihren eigenen Richtungen trägt vereinigt das Gewicht W und bringt folglich einen nach der Verticale OW gerichteten Druck hervor. Auch wird der Druck von AW nicht geändert, wenn wir für die Druckkräfte von BW und CW einen ihnen gleichgeltenden Druck substituiren, und dieser gleichgeltende Druck muss mit AW einen verticalen Druck in OW hervorbringen; er muss also in der Ebene AWO liegen und folglich die Richtung KW haben; denn er muss offenbar in der Ebene BWC liegen. Demnach können wir annehmen, dass das Gewicht W von zwei Stützen AW, KW getragen wird, und der Druck auf AW wie in der vorhergehenden Aufgabe gefunden wird. Es seien wieder P, Q, R die Druckkräfte der Stützen AW, BW, CW, so ist:

$$P = W . \frac{\cos AKW}{\sin AWK}$$

und eben so

$$Q = W . \frac{\cos BLW}{\sin BWL}$$

$$R = W \frac{\cos . CMW}{\sin . CWM}.$$

Zusatz 1. Da WO senkrecht auf AK ist, so haben wir:

$$\cos AKW = \frac{OK}{KW},$$

$$\sin AWK = \frac{AK}{KW} \sin KAW = \frac{KW}{AK} \cdot \frac{OW}{AW};$$

folglich: $$P = W \cdot \frac{OK}{KW} \cdot \frac{KW}{AK} \cdot \frac{AW}{OW}$$

$$= W \cdot \frac{OK}{AK} \cdot \frac{AW}{OW},$$

und ebenso: $$Q = W \cdot \frac{OL}{BL} \cdot \frac{BW}{OW}$$

$$R = W \cdot \frac{OM}{CM} \cdot \frac{CW}{OW}$$

Zusatz 2. Wenn wir AD, OE senkrecht auf BC ziehen, so erhalten wir:

$$\frac{OK}{AK} = \frac{OE}{AD}, \text{ und folglich } P = W \cdot \frac{OE}{AD} \cdot \frac{AW}{OW}$$

$$= W \cdot \frac{OE}{OW} \cdot \frac{AW}{AD}$$

$$= W \cdot \frac{1}{\text{tang } OEW} \cdot \frac{AW}{AD}$$

und ähnliche Ausdrücke würden wir für Q und R erhalten.

Zusatz 3. Es lässt sich leicht zeigen, dass WE senkrecht auf BC ist, und folglich misst der Winkel OEW die gegenseitige Neigung der Ebenen CBA, CBW. Wenn wir also aus dem Punkte C als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $= 1$ eine Kugel beschreiben, so entsteht aus ihrem Durchschnitte mit der Pyramide ein sphärisches Dreieck efg, worin der Winkel e dem Winkel OEW gleich ist, und wenn die von den Linien CA, CB, CW gebildeten Winkel bekannt sind, so sind die Seiten ef, fg, ge auch bekannt und der Winkel e kann gefunden werden.

Zusatz 4. Die horizontalen Druckkräfte, welche an den untern Enden A, B, C der Stützen aufgehoben werden müssen, wirken nach den Richtungen OA, OB, OC, und sind resp. gleich

$$P \cdot \frac{OA}{AW} = W \cdot \frac{OK}{AK} \cdot \frac{OA}{OW};$$

$$Q \cdot \frac{OB}{BW} = W \cdot \frac{OL}{BL} \cdot \frac{OB}{OW};$$

$$R \cdot \frac{OC}{CW} = W \cdot \frac{OM}{CM} \cdot \frac{OC}{OW}.$$

Zusatz 5. Wenn der Punkt O außerhalb des Dreieckes ABC fällt, so kann das Gewicht W nicht von den Stützen getragen werden.

Drittes Kapitel.

Von den einfachen Maschinen oder mechanischen Potenzen.

§ 33. Maschinen, oder wie sie in ihrer einfachsten Gestalt genannt werden, mechanische Potenzen, sollen dazu dienen, mit einer geringern Kraft eine größere Last im Gleichgewichte zu erhalten, oder in Bewegung zu setzen, oder einen größern Widerstand zu überwinden. Gegenwärtig wollen wir blos den Fall betrachten, wo das Gleichgewicht stattfindet; denn kennt man die Kraft, welche vermittelst einer Maschine einer Last gerade das Gleichgewicht hält, so ist klar, dass eine größere Kraft dieselbe in Bewegung setzen wird. In diesen Fällen wird nämlich, wie beim Hebel die angewandte Kraft die Kraft und der zu überwindende Widerstand die Last genannt, und letzterer wird durch ein Gewicht gemessen, welches derselben gleich ist.

Die mechanischen Potenzen reduciren sich auf den Hebel, das Rad an der Welle, das gezahnte Rad, die Rolle, die geneigte Ebene, den Keil und die Schraube.

Die vier ersten lassen sich im Zustande des Gleichgewichts auf den Hebel zurückführen, und die Schraube, so wie der Keil, auf die geneigte Ebene.

Die Art und Weise, wie wir den letztern betrachten werden, ist nicht unmittelbar auf den gewöhnlichen Fall anwendbar; denn wir nehmen bei unsern Betrachtungen des Keiles an, dass er durch Druck im Gleichgewichte erhalten und durch einen Ueberschuss von Druck in Bewegung gesetzt wird, während er in der Wirklichkeit durch die Reibung im Gleichgewichte erhalten, und durch den Stoß in Bewegung gesetzt wird.

Erster Abschnitt.

Mechanische Potenzen, welche sich auf den Hebel zurückführen lassen.

I. Der Hebel.

Dieses Instrument ist bereits im ersten Kapitel betrachtet worden.

II. Das Rad an der Welle.

§. 34. Das Rad an der Welle besteht aus einem Cylinder oder einer Welle AB (Fig. 37.) und einer damit fest verbundenen kreisförmigen Scheibe oder Rade EF, so dass das ganze um die Axe des

Cylinders beweglich ist. Das Gewicht W ist vermittelst eines Seiles oder einer Schnur NW an der Welle aufgehangen und wird offenbar auf- oder abwärts bewegt, je nachdem sich die Welle nach der einen oder andern Richtung drehet. Diesem Gewichte wird durch eine an dem Umfange des Rades EF wirkende Kraft das Gleichgewicht gehalten, und diese Kraft ist entweder auch ein Gewicht P, welches an einem nach entgegengesetztem Sinne von dem in N auf das Rad gewickelten Seile wirkt, oder irgend eine andere Kraft P', welche an einem Punkte M' des Umfanges des Rades wirkt.

Lehrsatz. Bei dem Rade an der Welle verhält sich die Kraft zur Last, wie der Halbmesser der Welle zu dem des Rades.*)

Es sei Fig. 38. eine Projection der Maschine auf die auf der Axe senkrechte Ebene EF, so ist klar, dass das Gleichgewicht fortbesteht, wenn wir annehmen, dass die Kraft P und die Last W, indem sie ihre Entfernung von der Axe der Welle beibehalten, in dieser Ebene wirken, und zwar nach den Verticallinien MP und NW, und es sei MCN eine durch den Mittelpunkt gehende Horizontallinie. Betrachten wir also MCN als einen Hebel, so verhält sich nach §. 15.:

$$P : W = CN : CM$$

d. h. die Kraft verhält sich zur Last wie der Halbmesser der Welle zu dem Halbmesser des Rades.

Es ist einleuchtend, dass diese Maschine im Gleichgewichtszustande nichts anders ist als der Hebel; aber im Bewegungszustande sind beide Maschinen verschieden; denn bei dem Rade an der Welle bewegt sich die Last W in einer verticalen Linie auf- oder abwärts, während sie bei dem Hebel einen Kreisbogen beschreibt.

Zusatz 1. Wenn die Kraft statt an einem Rade an einer Stange CM' wirkt, so hat man eine gewöhnliche Winde.

Zusatz 2. Wenn die Richtung der Kraft nicht senkrecht auf CM ist, so muss von dem Punkte C ein Perpendikel auf dieselbe gefällt werden, und alsdann wird die obige Proportion

P : W = Halbmesser der Welle : Perpendikel auf die Richtung der Kraft.

III. Gezahnte Räder.

§. 35. Wenn zwei um ihre Mittelpunkte bewegliche kreisrunde Scheiben A, B (Fig. 39.) an ihrem ganzen Umfange gleiche und gleich

*) In diesem Kapitel wird vorausgesetzt, dass sich die Maschinen im Gleichgewichte befinden.

weit von einander entfernte Zähne und eine solche Lage haben, dass diese Zähne einander berühren wie in Q, und das eine dieser Räder, z. B. A wird durch irgend ein Mittel gedrehet, so wird dadurch das andere auch in Bewegung gesetzt, und solche Räder heißen gezahnte Räder.

Wenn wir voraussetzen, dass die beiden Räder (Fig. 39.) in derselben Ebene liegen, und das eine A durch eine an einer Kurbel CE wirkende Kraft CE gedrehet wird, so hebt das andere an der Axe DF eine Last W, und das Verhältniss von P zu W wird durch folgenden Lehrsatz bestimmt.

Lehrsatz. Bei Zahnrädern verhält sich das Moment der Kraft P in Beziehung auf den Mittelpunkt des ersten Rades zu dem Momente der Last W in Beziehung auf den Mittelpunkt des zweiten Rades wie die resp. von den Mittelpunkten der Räder auf die Richtung ihrer gegenseitigen Wirkung gefällten Perpendikel.

Die Flächen der Zähne, welche auf einander wirken, werden als vollkommen polirt angesehen, d. h. wir nehmen an, dass sie ihren Druck nur nach einer auf diesen Flächen senkrechten Richtung ausüben, und jede Wirkung, welche längs der Oberfläche der Bewegung einen Widerstand entgegensetzt, wird als von einem Mangel an Politur herrührend angesehen. Wenn der an dem Berührungspunkte ausgeübte Druck nicht auf der gedrückten Fläche senkrecht wäre, so ließe sich der Druck in zwei Kräfte zerlegen, wovon die eine senkrecht auf der Tangente und die andere zu ihr parallel wäre, und wir nehmen an, dass diese letztere Kraft von der Reibung ꝛc. herrührt; aber gegenwärtig nicht in Betracht gezogen wird.

Es wirke das Rad A auf das Rad B in Q, so dass die darauf ausgeübte Wirkung auf den in diesem Punkte mit einander in Berührung kommenden Zahnflächen senkrecht ist; die Wirkung von A auf B ist alsdann der Gegenwirkung von B auf A gleich und entgegengesetzt, und diese Wirkung sei ein nach der Richtung MQN ausgeübter Druck Q. Alsdann hält die Kraft Q, indem sie auf das Rad B wirkt, der Last W und die entgegengesetzte Rückwirkung der Kraft P das Gleichgewicht. Wenn also CM, DN senkrecht auf MQN sind, so haben wir nach §. 20.:

$$P : Q = CM : CE$$
$$Q : W = DF : DN,$$

folglich:

$$P : W = CM \cdot DF : DN \cdot CE.$$

Hieraus folgt, wenn man das erste und dritte Glied mit CE und das zweite und vierte mit DF multiplicirt:

$$P.CE:W.DF=CM:DN$$

oder: Moment von P:Moment von W=CM:DN.

Zusatz 1. Wenn CD die Richtung MN in O schneidet, so haben wir wegen der ähnlichen Dreiecke:

$$CM:DN=CO:DO;$$

also: Moment von P:Moment von W=CO:DO.

Zusatz 2. Wenn die Zähne eine solche Form haben, dass der Punkt O fest bleibt, während sich die Räder drehen, so bleibt die Kraft während der Drehung dieselbe, und dieses ist der Fall, wenn die Radzähne die Form der Kreisevolvente haben.

Zusatz 3. Wenn die Zähne im Vergleich zu den Halbmessern der Räder klein sind, so fällt der Punkt Q fast mit dem Punkte O zusammen, und CO, DO sind sehr nahe den nach dem Berührungspunkte gehenden Halbmessern der Räder gleich. Folglich verhält sich:

Moment von P:Moment von W=Halbmesser von A:Halbmesser von B.

Zusatz 4. Damit die beiden Räder während einer ganzen Umdrehung wirken, muss der Zwischenraum zwischen ihren Zähnen gleich sein, wo sich alsdann die Anzahl der Zähne der Räder wie ihre Umfänge und folglich wie ihre Halbmesser verhalten. Es verhält sich also:

Moment von P:Moment von W=Anzahl der Zähne von A:Anzahl der Zähne von B.

Zusatz 5. Die Figur stellt eine Verbindung von einer Kurbel, zwei Zahnrädern und einer Welle dar, und wenn wir den Halbmesser DF der Welle, dem der Kurbel CE gleich annehmen, so rührt der ganze mechanische Vortheil von den Zahnrädern her, und in diesem Falle haben wir:

$$P:W=CO:DO.$$

Wenn die Anzahl der Zähne von A sehr klein ist, so wird A ein Getriebe genannt und seine Zähne Triebstöcke.

Die Zähne, worauf die des Rades A wirken, können sich auch statt auf einem Kreisumfange, an der Seite einer geradlinigen Stange befinden, welche sich nur nach der Richtung ihrer Länge bewegen kann.

Zuweilen werden die Räder durch ihre bloße gegenseitige Berührung gedrehet, zuweilen auch mittelst Schnüren, Riemen oder Ketten, welche um ihren Umfang gehen, und in diesen Fällen sind es die kleinen Erhabenheiten auf ihren Oberflächen, welche die Reibung verursachen und ihr Uebereinanderhingleiten verhindern, und die Wirkung und

Gegenwirkung findet alsdann an den Berührungspunkten auf die in dem Lehrsatze angenommene Weise statt.

IV. Rollen.

a. Die einfache bewegliche Rolle.

§. 36. Es ist bereits §. 8. ꝛc. der Rolle als eines Abänderungsmittels der Richtung der Schnur, woran eine Kraft wirkt, erwähnt, und sie besteht aus einem kleinen Rade, welches um seine Axe beweglich ist, und über dessen Umfang die Schnur geht. So lange die Axe der Rolle unbeweglich ist, kann sie blos eine Veränderung der Richtung der Kraft bewirken; aber wenn ihre Axe in einem Bügel befestigt ist, welcher beweglich ist, so kann sie auch einen mechanischen Vortheil gewähren.

Lehrsatz. Wenn bei einer einfachen beweglichen Rolle die beiden Seil- oder Schnurenden parallel sind, so findet zwischen der Kraft P und der Last W folgende Proportion statt:

$$P : W = 1 : 2.$$

Es sei CBAP (Fig. 40.) die über die Rolle AB gehende Schnur, an welcher die Kraft P wirkt, so ist nach §. 8. die Spannung der Schnur überall dieselbe und gleich der Kraft P. Die Rolle AB wird also von zwei nach den parallelen Richtungen AP, BC wirkenden Kräften, wovon jede $= P$ ist, getragen, und folglich muss die Last W, welche nach entgegengesetzter Richtung auf AB wirkt, nach §. 25. ihrer Summe gleich sein. Es ist also $W = 2P$.

Zusatz 1. Wenn die Schnüre KA, CB (Fig. 41.) nicht parallel sind, so verlängere man sie bis zu ihrem Durchschneiden in n, und ziehe on, wo o der Mittelpunkt der Rolle ist. Alsdann sind die von dem Mittelpunkte o der Rolle nach den Punkten A und B, wo die Richtung der Schnüre den Umfang der Rolle berühren, gezogenen geraden Linien oA, oB wegen der Kreisform der Rolle einander gleich, und die Winkel oAn, oBn rechte; folglich auch $onA = onB$. Die Schnüre AK, BC bringen offenbar dieselbe Wirkung hervor, als wenn sie in n wirkten, und die Kraft oder Spannung jedes derselben ist $= P$. Folglich theilt die Mittelkraft den Winkel AnB in zwei gleiche Theile und wirkt nach der Richtung no, und da das Gewicht durch die Kraft der Schnüre getragen wird, so muß die Richtung no der Richtung entgegengesetzt sein, nach welcher das Gewicht wirkt, und folglich vertical.

Eine horizontale gerade Linie schneide die Richtung der Schnüre in p, q und die verticale Linie mn in m, so sind die Linien np, nq

einander gleich, und können die Spannungen der Schnüre AK, BC ausdrücken. Nun ist aber die Kraft np von gleichem Werthe mit den Kräften nm, mp und nq gleichgeltend mit nm, mq, und da die Kräfte mp, mq einander gegenseitig aufheben, so ist die aufwärtswirkende Kraft der Schnüre $= 2nm$. Folglich verhält sich:

$$P : W = np : 2nm = r : 2r \cos pnm,$$

und wenn man $r = 1$, $pnm = a$ setzt, so hat man

$$W = 2P \cos a.$$

Wenn $a = o$ ist, so werden die Schnüre parallel, $\cos a = 1$ und $W = 2P$ wie oben.

Wenn $a = 60^0$ oder $AnB = 120^0$ ist, so ist $\cos a = \frac{1}{2}$ und $W = P$.

Zusatz 2. Wenn eine Last von einer beweglichen Rolle getragen wird, so bilden die beiden Schnur- oder Seilstücke gleiche Winkel mit der Richtung, nach welcher die Last wirkt.

Zusatz 3. Das Verhältniss der Kraft P zur Last W ergibt sich für den Fall der Fig. 40. auch, wenn man BA als einen Hebel betrachtet. Denn wenn man den Punkt B als einen Unterstützungspunkt und die Last W als von einer in A vertical wirkenden Kraft P getragen betrachtet, so haben wir:

$$P : W = Bo : BA = 1 : 2$$

wie vorhin. Die Rolle lässt sich also im Zustande des Gleichgewichtes auf den Hebel zurückführen.

b. Erstes System von Rollen, wo jede Rolle an einer besondern Schnur hängt.

§. 37. Das erste System von Rollen (Fig. 42.) ist fast nur eine Wiederholung der einfachen beweglichen Rolle. Die Last W wird von der Rolle A_1 getragen, die um A_1 gehende Schnur von A_2, die um A_2 gehende Schnur von A_3, u. s. f. und an der letzten Schnur, welche über eine feste Rolle B gehen mag, wirkt die Kraft P.

Lehrsatz. In dem ersten Systeme von Rollen, wo alle Schnüre zu einander parallel sind und das Gewicht der Rollen nicht in Betracht gezogen wird, verhält sich:

$$P : W = 1 : 2^n$$

wenn n die Anzahl der beweglichen Rollen ist.

Nach dem vorhergehenden §. ist nämlich die Spannung von $A_1 A_2$ gleich der Hälfte des Gewichtes an A_1 gleich $\frac{W}{2}$, die Spannung

von $A_2 A_3$ gleich der Hälfte des Gewichtes an A_2, gleich der Hälfte der Spannung von $A_1 A_2$, gleich $\frac{W}{2^2}$, die Spannung von $A_3 B$ gleich der Hälfte des Gewichtes an A_3, gleich der Hälfte der Spannung von $A_2 A_3$ gleich $\frac{W}{2^3}$ ꝛc. und endlich bei der n^{ten} Rolle A_n wäre $\frac{W}{2^n}$ gleich der Spannung von $A_n B$ gleich der Kraft P, als die Spannung der Schnur, woran die Kraft P wirkt. Es ist also

$$W = 2^n P,$$

wo n die Anzahl der beweglichen Rollen bezeichnet.

Zusatz 1. Wenn A_1, A_2, A_3, ... die Gewichte der Rollen mit Einschluss der Bügel resp. bezeichnen, so können wir jede Rolle als ein resp. an diesen Punkten aufgehangenes Gewicht betrachten. Folglich ist:

$$\text{Gewicht an } A_1 = W + A_1,$$

$$\text{Spannung von } A_1 A_2 = \tfrac{1}{2} \text{ des Gew. an } A_1 = \frac{W}{2} + \frac{A_1}{2};$$

$$\text{also: Gewicht an } A_2 = \frac{W}{2} + \frac{A_1}{2} + A_2,$$

$$\text{Spannung von } A_2 A_3 = \tfrac{1}{2} \text{ des Gew. an } A_2 = \frac{W}{2^2} + \frac{A_1}{2^2} + \frac{A_2}{2},$$

$$\text{Gewicht an } A_3 = \frac{W}{2^2} + \frac{A_1}{2^2} + \frac{A_2}{2} + A_3,$$

$$\text{Spannung von } A_3 B = \tfrac{1}{2} \text{ des Gew. an } A_3 = \frac{W}{2^3} + \frac{A_1}{2^3} + \frac{A_2}{2^2} + \frac{A_3}{2} = P,$$

und ebenso, wenn man n bewegliche Rollen hätte:

$$\frac{W}{2^n} + \frac{A_1}{2^n} + \frac{A_2}{2^{n-1}} + \ldots + \frac{A_n}{2} = P;$$

$$\text{also } W + A_1 + 2A_2 + \ldots + 2^{n-1} A_n = 2^n P.$$

Zusatz 2. Wenn die Rollen alle einander gleich sind und zwar jede $= A$, so ist:

$$W + A(1 + 2 + \ldots + 2^{n-1}) = 2^n P$$

$$W + A(2^n - 1) = 2^n P;$$

$$\text{also } W = 2^n P - A(2^n - 1).$$

Zusatz 3. Hieraus folgt, dass die Last W desto kleiner ist, je größer A ist. Wenn $2^n P = A(2^n - 1)$ ist, so ist $W = 0$, und die Kraft kann blos den Rollen das Gleichgewicht halten.

Zusatz 4. Wenn die Schnüre nicht parallel sind, so muss die Spannung eines jeden mit der des vorhergehenden nach Zus. 1. im vorhergehenden §. verglichen werden.

c. Zweites System von Rollen, worin dieselbe Schnur um alle Rollen geht.

§. 36. a. Dieses System (Fig. 43.) besteht aus zwei Bügeln, einem obern $B_1 B_2$ und einem untern $A_1 A_2$, wovon jeder eine Anzahl von Rollen enthält, und die Schnur geht abwechselnd um eine obere und untere Rolle; das Gewicht W hängt an dem untern Bügel und die Kraft P wirkt an dem freien Ende der Schnur.

Lehrsatz. Wenn in diesem zweiten Systeme von Rollen die Schnur- oder Seilstücke parallel sind, so verhält sich $P:W=1:n$, wo n die Anzahl der Schnur- oder Seilstücke an dem untern Bügel bezeichnet.

Da hier dieselbe Schnur oder dasselbe Seil um alle Rollen geht, so ist die Spannung überall dieselbe und gleich der Kraft P, und wenn die Anzahl der Schnur- oder Seilstücke an dem untern Bügel $=n$ ist, und dieselben als parallel angesehen werden, so tragen sie zusammen ein Gewicht $=nP$, weil jedes ein Gewicht P trägt. Folglich ist:

$$W=nP.$$

Zusatz 1. Wenn das Gewicht der Rollen in Betracht gezogen werden soll, so ist offenbar nur erforderlich, zu W das Gewicht des untern Bügels mit seinen Rollen, welches $=A$ sei, zu addiren, und alsdann ist:

$$W+A=nP, \text{ also } W=nP-A.$$

Zusatz 2. Wenn die Schnur- oder Seilstücke gegen die verticale Richtung geneigt sind, so ist blos der nach dieser Richtung zerlegte Theil der Kraft in Rechnung zu bringen; allein der Winkel, welchen die Schnur- oder Seilstücke mit der Verticale bilden, ist im Allgemeinen so klein, dass diese Correction vernachlässigt werden kann.

d. Drittes Rollensystem, worin jedes Seil- oder Schnurstück an der Last befestigt ist.

§. 37. a. Bei diesem Rollensysteme (Fig. 45.) trägt jede Schnur $P A_1 C_1$ die Last W zum Theil durch ihre Wirkung in C_1, wo sie befestigt ist, und zum Theil durch ihren Druck auf die nächste $A_1 A_2$.

Lehrsatz. Wenn in diesem dritten Rollensysteme die Schnüre oder Seile parallel sind, und das Gewicht der Rollen nicht in Betracht gezogen wird, so verhält sich:

$$P:W=1:2^n-1,$$

wo n die Anzahl der Rollen bezeichnet.

Denn die Spannung von PA_1 ist gleich P, also das an C_1 getragene Gewicht $= P$; Spannung von $A_1 A_2$ gleich dem Drucke auf $A_1 = 2P$, also das in C_2 getragene Gewicht $= 2P$; Spannung von $A_2 A_3$ gleich dem Drucke auf A_2 gleich $2^2 P$; folglich das in C_3 getragene Gewicht $= 2^2 P_1$ u. s. f.

Folglich ist das ganze Gewicht W, welches die Summe aller dieser in $C_1, C_2, C_3, \ldots$ getragenen Gewichte ist, gleich $P + 2P + 2^2 P + \ldots + 2^{n-1} P = (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}) P$; also

$$W = (2^n - 1) . P.$$

Zusatz 1. Wenn wir die Gewichte der Rollen mit in Betracht ziehen und sie respect. mit $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ bezeichnen, so ist die Spannung von PA_1 gleich dem Gewichte an $C_1 = P$, der Druck auf $A_1 = 2P$, die Spannung von $A_1 A_2$ gleich dem Gewichte an $C_2 = 2P + A_1$, der Druck auf $A_2 = 2^2 P + 2A_1$, die Spannung von $A_2 A_3$ gleich dem Gewichte an $C_3 = 2^2 P + 2A_1 + A_2$, der Druck auf $A_3 = 2^3 P + 2^2 A_1 + 2A_2 + A_3$, u. s. f.

Da nun das Gewicht W mit Einschluss des Bügels u. s. w. der Summe aller getragenen Gewichte gleich ist, so haben wir:

$$\begin{aligned} W = {} & (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}) P \\ & + (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-2}) A_1 \\ & + (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-3}) A_2 \\ & \ldots\ldots\ldots \\ & + (1 + 2) A_{n-2} \\ & + A_{n-1} \\ = {} & (2^n - 1) P + (2^{n-1} - 1) A_1 + (2^{n-2} - 1) A_2 + \ldots + A_{n-1}. \end{aligned}$$

Zusatz 2. In diesem Falle wird also W desto größer, je größer das Gewicht der Rollen ist, und wenn wir $P = o$ setzen, so erhalten wir das Gewicht W, welches die Rollen allein zu tragen vermögen.

Zusatz 3. Wenn alle Rollen gleich sind, und das Gewicht jeder $= A$ ist, so haben wir:

$$\begin{aligned} W &= (2^n - 1) P + (2^{n-1} - 1 + 2^{n-2} - 1 \ldots\ldots + 2 - 1) A \\ &= (2^n - 1) P + [2^n - 2 - (n - 1)] A \\ &= (2^n - 1) P + (2^n - n - 1) A = (2^n - 1)(P + A) - nA. \end{aligned}$$

Zusatz 4. Wenn die Schnüre nicht parallel sind, so muss der Zus. 1. in §. 36. angewandt werden.

Zweiter Abschnitt.

Mechanische Potenzen, welche sich auf die Zerlegung der Kräfte zurückführen lassen.

V. Die geneigte Ebene.

§. 38. Die geneigte oder schiefe Ebene, d. h. eine gegen den Horizont geneigte Ebene wird zuweilen auch als eine mechanische Potenz angewandt. Es sei W (Fig. 46.) ein Gewicht, welches auf der geneigten Ebene AC, die mit dem Horizonte den Winkel CAB bildet, durch eine nach der Richtung WK wirkende Kraft P im Gleichgewicht erhalten wird.

Lehrsatz. Wenn WK die Richtung der Kraft WN senkrecht auf der geneigten Ebene und KN eine Verticallinie ist, so verhält sich

$$P:W = WK:KN.$$

Die Wirkung der Ebene AC auf das Gewicht W erfolgt nach einer auf dieser Ebene senkrechten Richtung WR; denn die Ebene kann auf das Gewicht W in einer zu AC oder CA parallelen Richtung keine Wirkung hervorbringen (§. 35.). Das Gewicht W wird also ebenso unterstützt, als wenn es statt von der Ebene AC durch eine Schnur in der Richtung WR gehalten würde, und wir können daher annehmen, dass es an einer Schnur WR hängt, welche genau eine der Reaction R der Ebene gleiche Wirkung ausübt, dass darauf vermittelst der Schnur WK eine der Kraft P gleiche Wirkung ausgeübt wird und dass das Gewicht W nach der verticalen Richtung WD wirkt. Da nun KN zu WD parallel ist, so haben wir nach §. 28.:

$$P:W = WK:KN,$$

und ebenso:

$$R:P = WN:WK.$$

Zusatz 1. Wenn die Kraft P parallel zu dem Horizonte in der Richtung WE (Fig. 47.) wirkt, so fällt der Punkt K mit dem Punkte E zusammen, der Winkel E ist ein rechter und nach den ähnlichen Dreiecken hat man:

$$W:P = WE:EN = BC:AB,$$

und ebenso verhält sich: $R:W = WN:EN = AC:AB.$

Zusatz 2. Wenn die Kraft parallel zu der Ebene wirkt, so fällt der Punkt P mit dem Punkte C zusammen, und es verhält sich:

$$P:W = WC:NC = BC:AC$$

$$R:W = WN:NC = AB:AC.$$

Zusatz 3. Wenn die Kraft senkrecht auf den Horizont nach der Richtung WZ wirkt, so müssen wir annehmen, dass sich der Punkt K ins Unendliche entfernt, so dass WK, NK unendlich groß und einander gleich werden, und alsdann ist $P = W$, $R = o$.

Zusatz 4. Wenn die Kraft nach einer solchen Richtung wirkt, dass der Winkel CWY unterhalb der Ebene den Winkel CWZ oberhalb derselben gleich ist, so ist, wenn man von den rechten Winkeln CWN, CWR resp. die gleichen Winkel CWY, CWZ abzieht, der Winkel $YWN = ZWR$, und wegen der Parallelen $ZWR = YNW$; also $YW = YN$; folglich $P = W$.

Ferner hat man:

$$YWC = YCW = CWZ, \text{ also } YW = YC$$

und $$NC = 2YC = 2YN;$$

folglich: $$R : W = WN : NY = 2WN : NC = 2AB : AC.$$

Zusatz 5. Wenn die Kraft nach der Richtung WS wirkt, welche zwischen dem Perpendikel WZ auf dem Horizonte und dem Perpendikel WR auf der schiefen Ebene liegt, so fällt der Punkt K unterhalb N in M und das Gewicht, die Kraft und Rückwirkung der schiefen Ebene werden der Größe und Richtung nach durch die Linien NM, MW, WN ausgedrückt. Die Rückwirkung der geneigten Ebene findet also nach der Richtung WM statt, und der Körper W wird an der untern Seite der Ebene durch die Kraft im Gleichgewichte gehalten.

Zusatz 6. Wenn wir in Fig. 46. CV parallel zu KW ziehen, so haben wir:

$$P : W = KW : KN = CW : CN.$$

Für einen gegebenen Werth von W ist also P am kleinsten, wenn CV am kleinsten ist, d. h. wenn CV mit CW zusammenfällt, oder die Richtung der Kraft zu der der geneigten Ebene parallel ist.

Zusatz 7. Wenn zwei Gewichte W, W′ (Fig. 48.) einander auf zwei geneigten Ebenen AC, A′C vermittelst einer zu diesen Ebenen parallelen Schnur das Gleichgewicht halten, und P bezeichnet die überall gleiche Spannung der Schnur, so verhält sich nach Zus. 2.

$$P : W = BC : AC$$

$$W' : P = A'C : BC;$$

folglich: $$W' : W = A'C : AC.$$

Zusatz 8. Wenn ein Körper auf einer krummen Fläche ruhet, woran AC die Tangente für den Punkt W (Fig. 46) ist, so ist die

Wirkung ganz dieselbe, als wenn er auf der Ebene AC ruhete; denn das Gleichgewicht hängt einzig und allein von der Richtung der Oberfläche im Punkte W ab, welche für die Ebene und für die krumme Fläche dieselbe ist.

Zusatz 9. Wenn das Gewicht W die geneigte Ebene nicht blos in einem Punkte, sondern in einer endlichen Fläche wie in Figur 48 berührt, so bleibt das Verhältniß zwischen der Kraft und dem Gewichte noch ganz dasselbe wie zuvor, wofern auf die Reibung keine Rücksicht genommen wird; denn das von jedem Punkte getragene Gewicht steht zu dem Theile der Kraft, welcher es im Gleichgewichte hält, in demselben Verhältnisse und folglich steht das ganze Gewicht zu der ganzen Kraft ebenfalls in diesem Verhältnisse.

Zusatz 10. Es sei der Neigungswinkel der Ebene gegen den Horizont, nämlich $CAB = \alpha$, und der Winkel, welchen die Richtung der Kraft mit der schiefen Ebene bildet, nämlich $KWC = \varepsilon$, so verhält sich:

$$WK : KN = \sin WNK : \sin KWN$$
$$= \sin CAB : \sin KWR$$
$$= \sin CAB : \cos KWC$$

oder: $$P : W = \sin\alpha : \sin\varepsilon.$$

VI. Der Keil.

§. 39. Der Keil ist ein dreiseitiges Prisma, und wenn er als mechanische Potenz angewandt wird, so geschieht dies gewöhnlich zur Trennung von Hindernissen, indem man seine Schärfe zwischen sie bringt, und denselben dann weiter vorwärts treibt. Es sei ACc (Fig. 49) ein Keil, welcher sich zwischen zwei Körpern EW, Ew befindet, die ein beständiges Bestreben haben, sich zu nähern, welches durch eine auf den Rücken des Keiles wirkende Kraft, z. B. ein Gewicht P, mit Hindernisses E überwunden wird. In dem gegenwärtigen Kapitel betrachten wir die Kraft als mit dem Widerstande im Gleichgewichte, d. h. die Kraft P muß so groß sein, daß sie gerade hinreichend ist, um das Aufwärtssteigen des Keiles zu verhindern; aber den Keil auch nicht weiter niederwärts treibt.

Vermöge des festen Hindernisses E und der Beschaffenheit des zu spaltenden Körpers EW muß der Punkt W des letztern, wenn er sich bewegt, sich nach einer gewissen Richtung WU bewegen, indem er nämlich eine krumme Linie beschreibt, welche die gerade Linie WU in W berührt, und von welcher Beschaffenheit die Kraft, welche den Punkt W zu bewegen strebt, auch sein mag, so kann sie doch

nur in sofern eine Wirkung hervorbringen, als sie nach dieser Richtung wirkt. Wenn also VV V eine Kraft ist, welche auf VV wirkt, so ist sie gleichgeltend mit den Kräften VV U und VV V, welche letztere senkrecht auf VV U ist und durch das feste Hinderniss E aufgehoben wird, während VV U allein wirksam bleibt.

Es ist einleuchtend, dass das Gewicht oder der Widerstand in VV durch die Kraft gemessen werden muss, welche unmittelbar in VV angebracht werden muss, um demselben das Gleichgewicht zu halten, d. h. wenn U VV, u w die Richtungen sind, nach welchen sich die Punkte VV, w zu bewegen streben, und wenn VV, w die Kräfte bezeichnen, welche an diesen Punkten in den Richtungen VV U, w u angebracht werden müssen, um die Theile E VV, E w des zu trennenden Körpers in ihrer gegenwärtigen Lage zu erhalten, wenn der Keil hinweggenommen wird, so drücken VV, w auch die Widerstände aus, welchen durch den Keil das Gleichgewicht gehalten wurde.

Wenn die Seiten des Keils als vollkommen glatt angenommen werden, so muss ihre Wirkung in VV und w nothwendig auf ihren Flächen senkrecht sein (§. 35.). Dieses vorausgesetzt, lässt sich nun leicht bei dem Keile das Verhältniss zwischen der Kraft und der Last oder dem Widerstande bestimmen, und wir wollen annehmen, dass der Keil gleichschenklich ist, d. h. dass A VV = A w, Winkel A VV U = A w u und also auch der Widerstand VV dem Widerstande w gleich ist. In diesem Falle muss die Richtung D A, nach welcher die Kraft wirkt, durch den Punkt A gehen, und den Winkel VV A w halbiren.

Aufgabe. Bei dem Keile das Verhältniss zwischen der Kraft P und dem Widerstande VV zu finden.

Man ziehe O VV V senkrecht auf A VV und die Linie O w, welche auf A w senkrecht ist, weil die Dreiecke O A VV und O A w einander gleich sind. Ferner ziehe man die Linie VV w, welche A O in M schneidet, so ist VV M = w M. Es drücke VV V = VV O die auf der Seitenfläche des Keiles senkrechte Wirkung aus, so ist VV V der Kraft VV U, welche unmittelbar dem Widerstande entgegenwirkt, folglich demselben gleich ist, und der auf VV U senkrechten Kraft U V, welche durch das feste Hinderniss E aufgehoben wird, zusammengenommen gleich. Da also U VV den Widerstand ausdrückt, so kann VV O = VV V die Rückwirkung auf die Seitenfläche des Keiles ausdrücken und eben so kann die Rückwirkung auf den Keil in VV, welche aus einem gleichen und ähnlich wirkenden Widerstande entspringt, durch w O ausgedrückt werden. Ferner ist VV O gleichgeltend mit VV M, M O und w O mit w M, M O, wovon VV M, w M einander das Gleichgewicht halten, und wenn die beiden andern Kräfte M O, M O

durch eine Kraft 2P, welche durch 2MO ausgedrückt wird, im Gleichgewichte gehalten werden, so ist alles im Gleichgewichte, und es verhält sich: $2P:W=2MO:WU$.

Zusatz 1. Wenn WU mit WV zusammenfällt oder die Punkte des widerstehenden Körpers sich senkrecht auf AC bewegen, so sind die Dreiecke WMO, ADC einander ähnlich, und es verhält sich:

$$P:W=MO:WV=MO:WO=DC:AC$$

$$2P:W=Cc:AC.$$

Zusatz 2. Wenn WU senkrecht auf AD ist, so hat man:

$$P:W=MO:WU=MO:NW=DC:AD;$$

$$2P:W=Cc:AD.$$

Zusatz 3. Die Wirkung des Widerstandes auf die Seite AC ist nothwendig auf derselben senkrecht.*) Der Grund, weswegen W sich nicht in dieser Richtung bewegt, liegt darin, dass darauf auch noch der Widerstand eines festen Hindernisses E wirkt.

Zusatz 4. Es sei der Winkel $CAD=\alpha$ und der Winkel UWV zwischen dem Perpendikel WV auf AC und der Richtung WU des Widerstandes gleich ι, W der Widerstand auf jeder Seite und 2P die Kraft, so haben wir:

$$2P:W=\frac{2MO}{OW}:\frac{WU}{WV}, \text{ weil } OW=WV$$

$$=2\sin OWM:\cos UWY$$

$$=2\sin\alpha:\cos\iota$$

und $2P:2W=\sin\alpha:\cos\iota$,

wo 2W der ganze Widerstand ist.

VII. Die Schraube.

§. 40. Die allgemeine Form einer Schraube ist sehr bekannt. Sie besteht aus einem Cylinder CD (Fig. 50.), auf dessen Oberfläche sich eine vorspringende Ribbe oder ein Faden befindet, der um den Cylinder herumgeht, und zu gleicher Zeit gleichförmig nach der Länge des Cylinders aufsteigt.

---

*) Dieses unterscheidet sich von der gewöhnlichen Betrachtungsweise des Keiles, wobei der Widerstand als nach irgend einer Richtung, z. B. parallel zu AD wirkend angenommen wird. Dieses ist aber unmöglich; denn wenn ein Körper wie W mit einer parallel zu AD gerichteten Kraft und mit einer seitwärts gerichteten Kraft auf die Seite AC gedrückt wird, so bewegt er sich nothwendig längs AC fort, und das Gleichgewicht kann nicht stattfinden.

Dieser Theil des Instrumentes tritt in einen ähnlichen hohlen Cylinder AB (die Schraubenmutter), worin sich an der innern Fläche eine ebenso wie der Schraubenfaden fortlaufende und wie er geformte Vertiefung befindet, welche genau selbst durch den Schraubenfaden ausgefüllt wird. Um die Construction der Schraube und der Schraubenmutter besser zu zeigen, ist in Fig. 50. von jeder die Hälfte hinweggenommen. Es ist klar, dass wenn die Schraubenmutter fest ist, die durch sie gehende Schraube (Schraubenspindel) allein um ihre Axe gedrehet werden kann, längs welcher sie sich alsdann fortbewegt. Wenn die Schraubenspindel DC durch ein Gewicht W nach der Richtung ihrer Länge einen Druck erleidet, so ist nach der Form der Maschine einleuchtend, dass sich die Schraubenspindel DC niederwärts bewegt, wobei jeder Punkt des Fadens der Schraubenspindel, welcher mit der Schraubenmutter in Berührung ist, auf der geneigten Fläche des Fadens der Schraubenmutter wie auf einer schiefen Ebene herabsteigt, und das Herabsteigen des Gewichtes kann durch eine Kraft C verhütet werden, welche an dem Arme CM wirkt und die Drehung der Schraube verhindert.

Die Form der Schraube ist so beschaffen, dass wenn ihre Axe vertical steht, die Neigung des Schraubenfadens gegen den Horizont überall dieselbe ist, und dieser Schraubenfaden kann als eine um den Cylinder gewickelte geneigte Ebene betrachtet werden. Es sei fhf' (Fig. 51.) ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Kathete fof' dem Umfange eines horizontalen Durchschnittes FoF des Cylinders gleich ist. Wird alsdann dieses Dreieck so um den Cylinder gewickelt, dass fof' mit dem Kreisumfange FoF zusammenfällt, so fällt die Hypotenuse fnh mit dem Schraubenfaden FnH zusammen und FH ist parallel zu der Axe des Cylinders und wird die Schraubenweite genannt.

Lehrsatz. Wenn ein Gewicht W auf eine verticale Schraube drückt, und vermittelst einer horizontalen Kraft P, welche an dem Ende eines Armes CM senkrecht auf denselben wirkt, im Gleichgewicht gehalten wird, so verhält sich die Kraft P zu der Last W, wie die Schraubenweite zu dem Umfange des Kreises, dessen Halbmesser CM ist.

Das Gewicht W (Fig. 51.) ruhe auf der Schraubenspindel, deren Schraubenfaden auf den festen Schraubenfaden FGH der Schraubenmutter ruhet, und wir wollen annehmen, dass ein Theil des Gewichtes auf jedem Punkte des Schraubenfadens ruht, und dass das ganze Gewicht die Summe dieser Theile ist. Auf dem Punkte n werde ein Gewicht w vermittelst des Armes CM in Ruhe erhalten;

es sei cnm ein Arm $=CM$ und p eine horizontale und senkrecht auf cm wirkende Kraft, welche w im Gleichgewichte hält, so wird das Gewicht w ebenso im Gleichgewichte erhalten, wie wenn es sich auf der geneigten Ebene fnh befände; denn diese Ebene und der Schraubenfaden FnH haben in dem Punkte n dieselbe Richtung, und die Wirkung der Kraft p besteht darin, dass sie in n einen horizontalen Druck q hervorbringt, welcher das Heruntergleiten des Punktes n verhindert. Alsdann haben wir nach der Eigenschaft des Hebels:

$$p:q=cn:cm=2\pi.cn:2\pi.cm$$

und nach der Eigenschaft der geneigten Ebene:

$$q:w=f'h:ff'=FH:2\pi.cn;$$

folglich: $$p:w=FH:2\pi.cm=D:C;$$

also: $$p=\frac{D}{C}w.$$

Ebenso ruhe das Gewicht w' an irgend einem andern Punkte vermöge der Kraft p', welche an dem Ende eines Armes $=CM$ wirkt. Ferner das Gewicht w'' vermöge der Kraft p'' u. s. w.; so haben wir:

$$p'=\frac{D}{C}w',\ p''=\frac{D}{C}w''\ \text{etc.};$$

also: $$(p+p'+p''+\text{etc.})=\frac{D}{C}(w+w'+w''+\text{etc.}).$$

Da nun die Summe aller einzelnen Gewichte dem ganzen Gewichte gleich ist, und die Kraft $p+p'+p''+$etc., welche an CM wirkt dieselbe Wirkung hervorbringt, als die einzelnen Kräfte p an cm, etc. (§. 24.); so ist:

$$p+p'+p''+\text{etc.}=P,\ w+w'+w''+\text{etc.}=W$$

$$\text{und } P=\frac{D}{C}W,$$

oder $P:W=D:C=$ die Schraubenweite : dem Kreisumfange vom Halbmesser CM.

Zusatz 1. Wenn die Schraube zur Hervorbringung eines Druckes W nach der Richtung ihrer Länge angewandt wird, statt dass ein Gewicht W auf sie einen Druck ausübt, so bleibt das Verhältniss zwischen der Kraft und Last noch ganz dasselbe wie zuvor.

Zusatz 2. In Fig. 50. hat der um den Cylinder gewickelte Schraubenfaden eine solche Form, dass der Durchschnitt desselben mit einer durch die Axe der Schraube gehenden Ebene ein Rechteck bildet, dessen Seiten resp. zu der Axe parallel und darauf senkrecht sind. Allein der mechanische Vortheil, welchen die Schraube gewährt, bleibt

derselbe, welche Form dieser Durchschnitt auch haben mag, so lange nur die Neigung des Schraubenfadens dieselbe ist.

Zusatz 3. Das Verhältniß zwischen der Kraft und Last bleibt dasselbe, wenn die Schraubenspindel fest und die Schraubenmutter, welche die Last trägt, beweglich ist.

Zusatz 4. Der Durchmesser des Cylinders hat auf das Verhältniss von P:W keinen Einfluss, so lange die Schraubenweite oder die Steigung dieselbe bleibt.

VIII. Verbindung mechanischer Potenzen.

§. 41. Der mechanische Vortheil einer einfachen Maschine wird durch die Zahl ausgedrückt, welche angibt, wie vielmal die Last grösser ist als die Kraft, welche ihr an der Maschine das Gleichgewicht hält.

Die mechanischen Vortheile der verschiedenen einfachen Maschinen oder mechanischen Potenzen sind nach den vorhergehenden §§. folgende:

$$\text{Bei dem Hebel} = \frac{\text{Hebelarm der Kraft}}{\text{Hebelarm der Last}}.$$

$$\text{Bei dem Rade an der Welle} = \frac{\text{Halbmesser des Rades}}{\text{Halbmesser der Welle}}.$$

$$\text{Bei Zahnrädern} = \frac{\text{Anzahl der Zähne des Rades}}{\text{Anzahl d. Zähne d. Getriebes}} \left\{\begin{array}{l}\text{Näherungsweise, wenn die}\\ \text{Zähne klein sind}\end{array}\right\}.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Bei der einfachen Rolle} & = 2\\ \text{Bei dem ersten Rollensysteme} & = 2^n\\ \text{Bei dem zweiten } \text{„} \text{ „} & = 2\\ \text{Bei dem dritten } \text{„} \text{ „} & = 2^n - 1\end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l}\text{Wenn die Schnüre oder Seile}\\ \text{parallel sind und das Ge-}\\ \text{wicht der Rollen unbe-}\\ \text{rücksichtigt bleibt}\end{array}\right\}.$$

$$\text{Bei der geneigten Ebene} = \frac{\text{Länge der Ebene}}{\text{Höhe der Ebene}} \left\{\begin{array}{l}\text{Wenn die Kraft parallel}\\ \text{zu der Ebene wirkt}\end{array}\right\}.$$

$$\text{Beim Keile} = \frac{\text{Länge der Seitenfläche}}{\text{Breite des Rückens}} \left\{\begin{array}{l}\text{Wenn der Widerstand senkrecht}\\ \text{auf die Seitenfläche wirkt}\end{array}\right\}.$$

$$\text{Bei der Schraube} = \frac{\text{Von der Kraft beschrieb. Kreisumf.}}{\text{Die Schraubenweite}} \left\{\begin{array}{l}\text{Wenn die Kraft in}\\ \text{einer auf der Axe}\\ \text{senkrechten Ebene}\\ \text{wirkt}\end{array}\right\}.$$

Hiernach lässt sich auch der mechanische Vortheil jeder zusammengesetzten Maschine finden.

§. 42. Lehrsatz. Der mechanische Vortheil einer Verbindung von einfachen Maschinen wird gefunden, wenn man die mechanischen Vortheile der einzelnen Maschinen, woraus sie zusammengesetzt ist, mit einander multiplicirt.

Dieses läßt sich leicht an einem besondern Falle zeigen, z. B. an (Fig. 52.), welche eine Verbindung der Schraube, des Rades an der Welle, der Rolle und der geneigten Ebene ist. Eine Kurbel BC dreht nämlich einen Cylinder CD, woran sich ein Schraubenfaden befindet, um. Dieser Schraubenfaden greift in die Zähne eines Rades ED an der Welle EF; das um diese Welle gehende Seil wirkt auf ein System von Rollen der zweiten Art, welches an dem festen Punkte G befestigt ist, und dieser Flaschenzug zieht eine Masse W die geneigte Ebene GH hinauf.

Es sei P die in B senkrecht auf CB wirkende Kraft, so ist:

$$\frac{\text{Druck in D}}{\text{P}} = \frac{\text{von B beschriebener Kreisumfang}}{\text{Schraubenweite}} = n$$

$$\frac{\text{Druck in F}}{\text{Druck in D}} = \frac{\text{Halbmesser des Rades ED}}{\text{Halbmesser der Welle EF}} = n'$$

$$\frac{\text{Kraft in H}}{\text{Spannung in F}} = \text{Anzahl der Seile in H} = n''$$

$$\frac{\text{W}}{\text{Kraft nach GH}} = \frac{\text{Länge der geneigten Ebene}}{\text{Höhe der geneigten Ebene}} = n'''\text{;}$$

folglich:

$$\frac{W}{P} = n \,.\, n' \,.\, n'' \,.\, n'''.$$

Es sei z. B. CB = 18 Zoll, Schraubenweite = 1 Zoll, so ist der von B beschriebene Kreisumfang ungefähr = 113 Zoll und n = 113. Ferner sei ED = 2 Fuß, EF = 6 Zoll, so ist n′ = 4. Die Anzahl der Seile in H sei = 4, so ist n″ = 4 und die Neigung der Ebene sei = 30°, so ist n‴ = 2; folglich $\frac{W}{P} = 113 \,.\, 4 \,.\, 4 \,.\, 2 = 3616$,

d. h. vermittelst dieser Maschine kann ein Gewicht von 3 Pfd. eine Last von 10000 Pfd. heben.

§. 43. Die folgende Verbindung von Hebeln verdient wegen ihrer merkwürdigen Eigenschaften hier noch angeführt zu werden.

Es seien CA, AB, BD (Fig. 59. a.) drei Hebelarme, welche in der Ebene des Papieres um die Mittelpunkte C, D und um die Gelenke in A und B beweglich sind. In E wirkt nach der Richtung EF eine Kraft, und bringt in B einen Druck hervor, welcher nach der Richtung CB auf einen zwischen B und dem festen Hindernisse G befindlichen festen Körper ausgeübt wird, und man soll die Größe dieses Druckes bestimmen.

Man ziehe CM senkrecht auf EF; CN, DO senkrecht auf AB und DL senkrecht auf CB. Die nach der Richtung EF wirkende Kraft sei = P und der in B nach der Richtung CB ausgeübte Druck

$=W$. Der Hebel CA theilt dem Hebel DB vermittelst der Stange AB einen Druck mit, und dieser Druck wirkt nach der Richtung von AB. Es sei dieser Druck $=Q$, so hält die an dem Hebel CA nach der Richtung BA wirkende Kraft Q der nach der Richtung EF wirkenden Kraft P das Gleichgewicht; folglich ist:

$$\frac{P}{Q}=\frac{CN}{CM}.$$

Die Kraft Q, welche nach der Richtung AB auf den Hebel DB wirkt, bringt den Druck W hervor; mithin ist:

$$\frac{Q}{W}=\frac{DL}{DO},$$

und folglich:

$$\frac{P}{W}=\frac{CN.DL}{CM.DO}.$$

Wenn angenommen wird, dass CA, AB in derselben geraden Linie liegen, so verschwindet CN, und W wird gegen P unendlich groß. Wenn also in dem Augenblicke, wo der Druck W ausgeübt wird, die Hebelarme CA, AB fast in gerader Linie liegen, so ist dieser Druck gegen die dazu angewandte Kraft sehr groß, und kann über jede Grenze hinaus vergrößert werden.

Eine von ähnlichen Prinzipien abhängige Verbindung wird bei der Stanhopeschen und der Columbia-Buchdruckerpresse angewandt, und die Betrachtungen, woraus ihre Zweckmäßigkeit erhellet, werden zum Theil in dem folgenden §. vorkommen, wo wir sehen werden, dass wenn W gegen P sehr groß ist, die Geschwindigkeit der Bewegung des Punktes B in demselben Verhältnisse geringer sein muss, als die von P. Aber bei der oben beschriebenen Zusammensetzung wird die Geschwindigkeit von B gegen die von P erst dann gering, wenn CA, AB fast eine gerade Linie bilden. Das Ende B bewegt sich also mit der gehörigen Geschwindigkeit, wenn es sich der Lage nähert, in welcher der größte Druck ausgeübt wird, und nur dann bewegt sich dieses Ende B sehr langsam, wenn es in diese Lage gekommen ist, und den Druck wirklich ausübt.

Dritter Abschnitt.

Allgemeine Eigenschaft der mechanischen Potenzen.

§. **44.** Vermittelst Maschinen kann eine gegebene Kraft jedes Hinderniss überwinden oder jede beliebige Last heben; allein die folgenden Sätze werden zeigen, dass, was an Kraft gewonnen wird, an Zeit verloren geht, d. h. in demselben Verhältnisse, in welchem die

Kraft, durch welche eine Last bewegt wird, durch die Maschine sich vergrößert, wird die Geschwindigkeit, womit sie sich bewegt, vermindert.

Wenn sich Körper durch Räume bewegen, welche stets in demselben Verhältnisse stehen, so stehen ihre Geschwindigkeiten auch in diesem Verhältnisse; aber wenn das Verhältniss der beschriebenen Räume veränderlich ist, so können wir annehmen, dass die Körper sehr kleine Räume beschreiben, und das Verhältniss dieser sehr kleinen Räume, an der Grenze ihrer Kleinheit genommen, ist alsdann dem Verhältnisse der Geschwindigkeiten gleich.

Aufgabe. Die Geschwindigkeit eines Körpers in einer gegebenen Richtung zu finden.

Ein Punkt W (Fig. 56.) bewege sich nach der Richtung W w; es seien W P, w p nach irgend einer andern Richtung gezogene Parallellinien und w n senkrecht auf W P, so drückt, wenn W w die Geschwindigkeit des Körpers nach der Richtung seiner Bewegung ausdrückt, W n die Geschwindigkeit desselben nach der Richtung W P aus, und es ist $Wn = Ww . \cos PWw$.

§. 45. Lehrsatz. In jeder der mechanischen Potenzen verhält sich die Kraft zu der Last, wie die Geschwindigkeit der Last in der Richtung ihrer Wirkung zu der Geschwindigkeit der Kraft in der Richtung ihrer Wirkung.

Wir wollen diesen Satz bei jeder einzelnen der mechanischen Potenzen beweisen.

I. Hebel.

§. 46. Es sei A C B (Fig. 53.) ein Hebel, auf welchen zwei Kräfte P, W nach den Richtungen A P, B W wirken und C M, C N seien Perpendikel aus dem Drehungsmittelpunkte C auf die Richtungen der Kräfte.

Der Hebel drehe sich um einen sehr kleinen Winkel in die Lage a C b, so beschreiben die Punkte A und B Kreisbogen A a, B b, welche sich wie die Geschwindigkeiten der Punkte A und B verhalten und als gerade Linien betrachtet werden können, wenn man sie beliebig klein werden lässt. Wenn also a m, b n senkrecht auf A E, B W gezogen sind, so verhalten sich A m, B n nach dem vorhergehenden §. wie die Geschwindigkeiten der Punkte A und B in den Richtungen der Kräfte.

Betrachten wir nun A a als eine gerade Linie, so wird C A a zuletzt ein rechter Winkel; folglich $CAM + aAm = 90^0 = CAM + ACM$, und mithin, wenn man auf beiden Seiten den Winkel

CAM hinwegnimmt, aAm=ACM. Mithin sind die Dreiecke CAM, Aam einander ähnlich, und ebenso ergibt sich, dass CBN und Bbn ähnliche Dreiecke sind.

Ferner ist der Winkel aCb=ACB und folglich, wenn man von jedem den Winkel aCB hinwegnimmt, ACa=BCb; und CA=Ca, CB=Cb; folglich sind die Dreiecke ACa, BCb einander ähnlich, und wir haben die Proportionen:

$$Am : Aa = CM : CA$$
$$Aa : Bb = CA : CB$$
$$Bb : Bn = CB : CN,$$

woraus sich durch Zusammensetzung ergibt:

$$Am : Bn = CM : CN$$
$$= W : P \text{ (§. 20.)};$$

also: Geschwindigkeit von P : Geschwindigkeit von W = W : P.

II. Rad an der Welle.

§. 47. Wenn sich das Rad an der Welle (Fig. 38.) um irgend einen Winkel drehet, so ist klar, dass sich die von den Punkten M und N beschriebenen Bogen wie CM:CN verhalten; aber diese Bogen sind resp. den ab- und aufgewickelten Seilstücken gleich, und verhalten sich folglich wie die Geschwindigkeiten von P und W. Es verhält sich also:

Geschwindigkeit von P : Geschwindigkeit von W = CM:CN = W:P.

III. Zahnräder.

§. 48. Es seien A, B (Fig. 54.) zwei Räder, welche einander durch irgend ein Mittel in Bewegung setzen, und wenn es gezahnte Räder sind, so wollen wir die Zähne so klein annehmen, dass der Berührungspunkt derselben als im Punkte O der Verbindungslinie der Mittelpunkte der Räder liegend angenommen werden kann. Ferner wollen wir annehmen, dass die Kraft P und die Last W an gleichen Wellen CE, DF wirken, so dass sich nach §. 35. verhält P:W=CO:DO.

Nun wollen wir annehmen, dass sich die Räder um einen kleinen Winkel drehen, so dass die Punkte, welche in O mit einander in Berührung waren, sich nun in m und n befinden, so sind die Bogen Om und On einander gleich, weil sie sich gewissermaßen von einander abgewickelt haben, und wenn wir die Linie meC, welche den Kreis CE in e schneidet und die Linie nDf, welche den Kreis DF in f schneidet, ziehen, so sind Ee und Ff die Räume, um welche sich die Kraft P und die Last W resp. auf- und abwärts bewegt haben, und nach den ähnlichen Kreisausschnitten in der Figur verhält sich:

$$Ee : Om = CE : CO$$
$$On (= Om) : Ff = DO : DF (= CE);$$
also $$Ee : Ff = DO : CO$$

oder: Geschwindigkeit von P: Geschwindigkeit von $W = W : P$.

Zusatz. Ee, Ff verhalten sich wie die Winkelgeschwindigkeiten der Räder A und B und folglich verhalten sich die Winkelgeschwindigkeiten der auf einander einwirkenden Räder umgekehrt wie ihre Halbmesser; mithin verhalten sich auch die Umdrehungszahlen für eine gegebene Zeit umgekehrt wie diese Halbmesser.

IV. Rollen.

§. 49. — a. Wenn an der einfachen Rolle mit parallelen Schnüren die Last W (Fig. 40.) um irgend einen Raum, z. B. einen Zoll steigt, so wird jeder der Schnüre AP, BC an dem untern Ende um einen Zoll verkürzt, und folglich bewegt sich die Kraft P um zwei Zoll aufwärts. Es verhält sich also:

Geschwindigkeit von P: Geschwindigkeit von $W = 2 : 1= W : P$.

§. 50. — b. Bei der einfachen beweglichen Rolle mit nicht parallelen Schnüren (Fig. 55.) wollen wir die Rolle in A als einen Punkt betrachten; es sei CAK die ursprüngliche Lage der Schnur, und sie werde in die Lage CaK bewegt, so dass die Last W um den kleinen Raum Aa aufsteigt und die Kraft P um den Raum Pp sinkt. Man nehme Km, Cn resp. gleich Ka, Ca und Am + An ist die Größe, um welche sich die Schnur CAK verkürzt, und folglich auch die Größe, um welche sich KP verlängert hat, d. h. es ist $Pp = Am + An$. Wenn nun der Winkel AKa sehr klein ist, so kann am zuletzt als auf AK und dn als auf AC senkrecht betrachtet werden. Es ist also

$Am = Aa \cos aAm = Aa \cos \alpha$, wenn $aAm = \alpha$ ist,

und ebenso $An = Aa \cos \alpha$;

folglich: $Pp = 2Aa \cos \alpha$;

also: $Pp : Aa = 2 \cos \alpha : 1$.

oder Geschwindigkeit von P: Geschwindigkeit von $W = W : P$ (§. 36.).

Wenn die Rolle, wie in Fig. 41. eine endliche Größe hat, und die Veränderung ihrer Lage nur gering ist, so können die Schnüre KA, CB als parallel zu sich selbst bleibend angesehen werden, der Theil AB der Schnur, welcher die Rolle berührt, wird nicht geändert, und folglich wird auch der von der Kraft P beschriebene Raum nicht geändert.

§. 51. — c. Wenn in dem ersten Rollensysteme Fig. 42. das Gewicht W um irgend einen Raum, z. B. einen Zoll steigt, so steigt wie in der einfachen Rolle, die Rolle A_2 um 2 Zoll, die Rolle A_3 aus demselben Grunde um 2×2 Zoll, die folgende Rolle um $2 \times 2 \times 2$ Zoll, u. s. f. bis zu der Kraft P, welche offenbar um 2^n Zoll herabsinkt. Es verhält sich also:

Geschwindigkeit von P : Geschwindigkeit von $W = 2^n : 1 = W : P$.

§. 52. — d. Wenn in dem zweiten Rollensysteme (Fig. 43.) die Last W um einen Zoll steigt, so wird jede der Schnüre, woran der untere Bügel hängt, um 1 Zoll verkürzt, und folglich wird die ganze Länge der Schnur zwischen den beiden Bügeln um n Zoll verkürzt, so dass auch die Kraft P um n Zoll herabsinkt. Es verhält sich also:

Geschwindigkeit von P : Geschwindigkeit von $W = n : 1 = W : P$.

Zusatz. In diesem Rollensysteme geht 1 Zoll der Schnur in derselben Zeit über die Rolle A_1, in welcher 2 Zoll über die Rolle B_1, 3 Zoll über die Rolle A_2, 4 Zoll über die Rolle B_2 u. s. w. gehen. Wenn sich also die Halbmesser $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots$ wie 1, 2, 3, 4, ... verhalten, so verhalten sich die Geschwindigkeiten ihrer Umfänge wie die Halbmesser, und folglich sind die Winkelgeschwindigkeiten gleich. Es können sich daher die Rollen A_1, A_2, an derselben Axe befinden und ebenso B_1, B_2, wie in Fig. 44.

§. 53. — e. In dem dritten Rollensysteme (Fig. 45.) steige die Last um einen Zoll, so sinkt die Rolle A_2 um einen Zoll herab, die Rolle A_1 sinkt aus diesem Grunde um 2 Zoll, und da auch c_2 um 1 Zoll gestiegen ist, so sinkt A_1 um einen Zoll aus diesem Grunde, also im Ganzen um $(2+1)$ Zoll. Dagegen sinkt die Kraft P aus diesem Grunde um $2\,(2+1) = 2^2 + 2$ Zoll herab, und folglich um 1 Zoll mehr als c_1, welches um 1 Zoll gestiegen ist. Die Kraft P sinkt also um $2^2 + 2 + 1 = 2^3 - 1$ Zoll. Es verhält sich also:

Geschwindigkeit von P : Geschwindigkeit von $W = 2^3 - 1 : 1 = W : P$

und ebenso bei einer beliebigen Anzahl von Rollen.

V. Die geneigte Ebene.

§. 54. — Die Last W (Fig. 56.) steige um einen kleinen Raum Ww und WP werde als zu wp parallel angenommen. Man ziehe WE horizontal und wm, wn resp. senkrecht auf WE, WP. Alsdann verhalten sich Wn, wm zuletzt wie die Geschwindigkeiten in den Richtungen der Kraft und Last. Aber wenn $CAB = wWn = \alpha$ und $CWP = \varepsilon$ gesetzt wird, so verhält sich:

$$W n : w n = W w . \cos \varepsilon : W w \sin \alpha$$
$$= \cos \varepsilon : \sin \alpha,$$

oder Geschwindigkeit von P: Geschwindigkeit von $W = W : P$ (§. 38., Zus. 10.).

VI. Der Keil.

§. 55. Es sei ADC (Fig. 57.) ein gleichschenkliger Keil, AD die Halbirungslinie des Rückens, und er bewege sich in der Richtung der Linie DA durch einen kleinen Raum AQ, so bewegt sich der Punkt W um den Raum Wn in der Richtung WU, welche mit der Linie WV, die auf der Seite AC senkrecht ist, einen Winkel ι bildet. Alsdann ist:

$$W n = \frac{W m}{\cos \iota} = \frac{A a \sin \alpha}{\cos \iota}, \text{ wo } \alpha = D A C \text{ ist;}$$

$$A a \text{ oder } D d : W n = \cos \iota : \sin \alpha,$$

oder Geschwindigkeit von P: Geschwindigkeit von $W = W : P$ (§. 39., Zus.).

VII. Die Schraube.

§. 56. Wenn der Angriffspunkt M der Kraft (Fig. 51.) mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit eine ganze Umdrehung macht, so steigt die Last W mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit um eine Schraubenweite aufwärts, und der Raum, welchen P in einer horizontalen Richtung, in welcher die Kraft als wirkend angenommen wird, beschreibt, ist ein Kreis von dem Halbmesser CM. Es verhält sich also:

Geschwindigkeit von P: Geschwindigkeit von W = Kreisumf. von dem Halbm. DE: Schraubenweite $= W : P$.

VIII. Eine beliebige Maschinenverbindung.

§. 57. Für irgend eine Verbindung der einfachen Maschinen wird das Verhältniss der Geschwindigkeit der Kraft zu der Last gefunden, wenn man dieselben Verhältnisse für die einfachen Maschinen, woraus sie zusammengesetzt ist, mit einander multiplicirt, und das Verhältniss der Last zur Kraft wird gefunden, wenn man dieselben Verhältnisse für die einfachen Maschinen mit einander multiplicirt, und welche, wie wir gesehen haben, dieselben sind, wie die erstern; folglich ist auch das zusammengesetzte Verhältniss dasselbe, und bei jeder zusammengesetzten Maschine, woran eine Kraft P einer Last W das Gleichgewicht hält, findet, wenn sie eine sehr kleine Bewegung annimmt, ebenfalls die Proportion statt:

Geschwind. d. Kraft P in ihrer Richtung: Geschw. d. Kraft W in ihrer Richtung $= W : P$.

Zusatz 1. Hieraus folgt:

P × Geschwindigk. von P = W × Geschwindigkeit von W.

Das Product aus einem Gewichte und seiner Geschwindigkeit wird sein Moment genannt, und es ist also nach der vorhergehenden Gleichung das Moment der Kraft P gleich dem Momente der Last W.

Zusatz 2. Wenn P × Geschwindigkeit von P = W × Geschwindigkeit von W ist, so halten P und W einander das Gleichgewicht; denn wenn dieses nicht der Fall wäre, so mögen P und W′ an derselben Maschine einander das Gleichgewicht halten, so ist P × Geschwindigkeit von P = W′ × Geschwindigkeit von W′ und die Geschwindigkeit von W′ ist dieselbe als die von W, so lange die Maschine dieselbe bleibt. Es ist also W′ = W, und folglich halten P und W einander das Gleichgewicht.

Viertes Kapitel.

Vom Schwerpunkte.

§. 58. Der Schwerpunkt eines Körpers oder eines Systems von Körpern ist ein Punkt von solcher Beschaffenheit, dass der Körper oder das System von Körpern, wenn blos die Schwere darauf wirkt, sich in allen Lagen im Gleichgewichte befindet, wenn dieser Punkt als fest angenommen wird.

Wir werden sehen, dass es in jedem Systeme von Körpern einen solchen Punkt gibt, indem wir zeigen, wo er in jedem Falle liegt, und es wird sich alsdann auch ergeben, dass es immer nur einen solchen Punkt gibt, auf welchen die obige Definition anwendbar ist.

Manche Eigenschaften des Punktes, welchen wir Schwerpunkt nennen, sind von der Wirkung der Schwere unabhängig, und lassen sich ohne Voraussetzung der Existenz dieser Kraft ausdrücken und beweisen, weshalb dieser Punkt von einigen Schriftstellern auch der Mittelpunkt der Größe und von andern der Mittelpunkt der parallelen Kräfte genannt ist.

Die obige Definition des Schwerpunktes setzt voraus, dass die einzelnen Theile des Systems auf eine unveränderliche Weise mit einander verbunden sind, allein dieser Punkt kann nach derselben Methode gefunden werden, wenn die einzelnen Theile von einander getrennt sind.

Aus unserer Definition des Schwerpunktes folgt, dass, wenn eine durch denselben gehende gerade Linie oder Ebene unterstützt ist,

das System um diese Linie oder Ebene in allen Lagen sich im Gleichgewichte befindet.

§. **59.** Wenn ein System materieller Punkte in allen Lagen an einer geraden Linie im Gleichgewichte ist, so liegt der Schwerpunkt in dieser Linie.

Wenn ein System materieller Punkte um eine gerade Linie von selbst im Gleichgewichte ist, so müssen die Momente der Kräfte, welche es nach der einen und der andern Richtung zu drehen streben, gleich sein.

Das Moment der Kraft, welche auf jeden materiellen Punkt wirkt, und das System um die gerade Linie zu drehen strebt, wird gefunden, wenn man diese Kraft in zwei andere zerlegt, wovon die eine zu dieser geraden Linie oder Axe parallel ist und die andere in einer auf dieser Axe senkrechten Ebene liegt. Diese letzte Kraft ist allein wirksam, und ihr Moment ist für eine gegebene Lage der Axe der Quantität der in den betrachteten Körpertheilchen enthaltenen Masse und der Entfernung desselben von einer durch die Axe gelegten Verticalebene proportional, wie aus §. **24.** erhellet.

Wenn der Schwerpunkt nicht in der geraden Linie liegt, an welcher das System in allen Lagen im Gleichgewicht ist, so kann dieses System in eine solche Lage gebracht werden, dass die Linie, an welcher es von selbst im Gleichgewichte ist, und der Schwerpunkt nicht in derselben Verticalebene liegen, und wenn sich das System in dieser Lage befindet, so lasse man die Linie, an welcher es im Gleichgewichte ist, parallel zu sich selbst fortbewegen, bis sie durch den Schwerpunkt geht. Alsdann wird auf der einen Seite dieser geraden Linie sowohl die Quantität der Materie als die Entfernung jedes Körpertheilchens von der verticalen Ebene vergrößert, während auf der andern Seite beide vermindert werden.

Wenn also das System von selbst im Gleichgewichte ist, bevor die gerade Linie bewegt wird, so wird auf der einen Seite das Bestreben, herabzusinken, durch beide Ursachen vergrößert, das System kann nicht länger im Gleichgewichte bleiben und also auch nicht in allen Lagen um dieselbe gerade Linie im Gleichgewichte sein. Aber da die Linie nun durch den Schwerpunkt geht, so muss das System nach dem vorhergehenden §. an derselben im Gleichgewichte sein. Es folgt also aus der Annahme, dass die gerade Linie, an welcher das System in allen Lagen im Gleichgewichte ist, nicht durch den Schwerpunkt gehe, ein Widerspruch.

Zusatz **1.** Durch eine ähnliche Betrachtung ergibt sich, dass ein System materieller Punkte nicht mehr als einen Schwerpunkt haben kann.

Zusatz 2. Wenn es zwei Linien gibt, an welchen das System einzeln in allen Lagen im Gleichgewichte ist, so muss der Schwerpunkt in ihrem Durchschnitte liegen.

Zusatz 3. Wenn ein System materieller Punkte an einer geraden Linie oder Axe auch nur in einer Lage im Gleichgewichte ist, so liegt der Schwerpunkt in der durch diese Axe gelegten Verticalebene.

Denn wenn dieses nicht der Fall wäre, so könnte man durch den Schwerpunkt eine gerade Linie ziehen, und das System wäre an derselben im Gleichgewichte. Es könnte also an zwei verschiedenen und in zwei verschiedenen Verticalebenen liegenden Axen im Gleichgewichte sein, was nach dem Vorhergehenden nicht möglich ist.

§. 60. Aufgabe. Den Schwerpunkt zweier als schwere Punkte betrachteten Körper P, Q (Fig. 59.) zu finden.

Man nehme P und Q als durch eine unbiegsame Stange mit einander verbunden an und den Punkt G so, daß sich verhält $P+Q : P = PQ : GQ$, und $Q : P = PG : QG$, so ist G der gesuchte Schwerpunkt. Denn man ziehe die Horizontallinie MGN, welche die Verticalen PM, QN schneidet, so verhält sich wegen der ähnlichen Dreiecke $P : Q = QG : PG = GN : GM$; es ist also $P.GM = Q.GN$ und folglich halten P und Q einander in jeder Lage um den Punkt G das Gleichgewicht; mithin ist G der gesuchte Schwerpunkt.

Zusatz 1. Die Wirkung der Gewichte P, Q ist dieselbe, als wenn sie an den Punkten M, N wirkten; aber in diesem Falle ist der Druck auf den festen Punkt G nach §. 15. Zus. 2 $= P+Q$ und folglich ist der Druck der beiden Gewichte auf den Schwerpunkt in jeder Lage derselben ihrer Summe gleich.

Zusatz 2. Hiernach lässt sich auch leicht der Schwerpunkt einer beliebigen Anzahl als Punkte betrachteter Körper $P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots$ (Fig. 60.) finden. Denn denkt man sich P_1, P_2 durch eine unbiegsame Stange verbunden und nimmt den Punkt g_1 so, dass sich $P_1P_2 : P_1g_1 = P_1+P_2 : P_2$ verhält, so halten P_1, P_2 nach dem Vorhergehenden einander um den Punkt g_1 in jeder Lage das Gleichgewicht, und der Druck auf diesen Punkt g_1 ist nach Zusatz 1. gleich P_1+P_2. Hierauf denke man sich g_1 und P_3 durch eine unbiegsame Linie verbunden, und nehme auf derselben den Punkt g_2 so, dass sich $g_1P_3 : g_1g_2 = P_1+P_2+P_3 : P_3$ verhält, folglich $g_2P_3 : g_1g_2 = P_1+P_2 : P_3$ oder $g_2P_3 : g_2g_1 =$ Druck in g_1 : Druck in P_3; und g_1 und P_3, oder P_1, P_2, P_3 halten einander also nach dem Vorhergehenden in jeder Lage um g_2 das Gleichgewicht, und folglich ist g_2 der Schwerpunkt von P_1, P_2, P_3. Ferner ist der Druck auf $g_2 = P_1+P_2+P_3$.

Verbindet man ferner g_2 und P_4 durch eine unbiegsame gerade Linie, und nimmt den Punkt g_3 darauf so, dass sich verhält $g_2 P_4 : g_2 g_3 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 : P_4$, so halten P_1, P_2, P_3, P_4 einander in jeder Lage um den Punkt g_3 das Gleichgewicht, welcher daher ihr Schwerpunkt ist, und der Druck auf g_3 ist $= P_1 + P_2 + P_3 + P_4$. u. s. f.

Diese Construction ist auch anwendbar, wenn die schweren Punkte nicht in derselben Ebene liegen.

Zusatz 3. Wenn wir die schweren Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 in einer andern Ordnung betrachten, so finden wir denselben Schwerpunkt g_3, welches nach dem vorhergehenden §. einleuchtend ist; denn ein System schwerer Körper oder Punkte kann nicht mehr als einen Schwerpunkt haben, was sich auch geometrisch zeigen lässt.

Zusatz 4. Aus Zusatz 2. erhellet, dass der Druck auf den Schwerpunkt, wenn er fest ist, dem ganzen Gewichte des Systemes gleich ist.

Zusatz 5. Sollen die einzelnen Theile eines schweren Systemes einander das Gleichgewicht halten, so müssen sie, wie wir auch vorausgesetzt haben, fest mit einander verbunden sein. Aber der in Zusatz 2. gefundene Punkt wird der Schwerpunkt genannt, wenn sie unverbunden und eben in Bewegung sind.

Aber auch wenn die auf das System wirkende Kraft nicht die Schwerkraft, sondern irgend eine andere Kraft ist, welche fortwährend in derselben Stärke und nach parallelen Richtungen wirkt, behält dieser Punkt denselben Namen.

§. 61. Aufgabe. Den Schwerpunkt einer beliebigen Anzahl von Körpern $P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots$ (Fig. 61.), welche als Punkte betrachtet werden, die in derselben geraden Linie liegen, zu finden.

Es sei G der Punkt, an welchem die gerade Linie in horizontaler Lage im Gleichgewichte bleibt, so ist G nach §. 46. der Schwerpunkt, und um denselben zu finden, nehme man in der geraden Linie irgend einen Punkt A an, so hat man nach §. 22. Zus. 2., da die Gewichte $P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots$ einander das Gleichgewicht halten:

$$P_1 . P_1 G + P_2 . P_2 G = P_3 . P_3 G + P_4 . P_4 G,$$

oder
$$P_1 (AG - AP_1) + P_2 (AG - AP_2) = P_3 (AP_3 - AG) + P_4 (AP_4 - AG),$$

oder
$$P_1 . AG - P_1 . AP_1 + P_2 . AG - P_2 . AP_2 = P_3 . AP_3 - P_3 . AG + P_4 . AP_4 - P_4 . AG$$

folglich: $P_1.AG+P_2.AG+P_3AG+P_4AG$

$=P_1.AP_1+P_2.AP_2+P_3.AP_3+P_4.AP_4$

also: $$AG=\frac{P_1.AP_1+P_2.AP_2+P_3.AP_3+P_4.AP_4}{P_1+P_2+P_3+P_4}.$$

Also ist AG bekannt, mithin auch die Lage des Punktes G, und dasselbe Verfahren gilt für eine beliebige Anzahl von Kräften.

Zusatz 1. Wenn der Schwerpunkt nicht zwischen P_2 und P_3 liegt, sondern irgend anderswo, z. B. zwischen P_1 und P_2; so haben wir statt $P_2\ (AG-AP_2)$ auf der ersten Seite der obigen Gleichung $P_2\ (AP_2-AG)$ auf der zweiten Seite, so dass das Resultat ganz dasselbe bleibt.

Zusatz 2. Wenn mehrere der schweren Punkte auf der andern Seite von A liegen, so werden ihre Entfernungen von dem Punkte A negativ genommen, und man hat z. B. statt des Gliedes $P_5\ (AG-AP_5)$ das Glied $P_5\ (AG+AP_5)$ oder $P_5\ [AG-(-AP_5)]$.

§. 62. Aufgabe. Den Schwerpunkt einer beliebigen Anzahl von Körpern $P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots$ (Fig. 60.), welche als schwere Punkte betrachtet werden und in derselben Ebene liegen, zu finden.

Es sei G der wie in §. 46. Zus. 2. gefundene Schwerpunkt. Man ziehe in der Ebene irgend eine Linie Ax und auf sie die Perpendikel $P_1M_1, P_2M_2, P_3M_3, P_4M_4, \ldots, g_1h_1, g_2h_2, g_3h_3, \ldots$ und endlich ziehe man zu Ax die Linie mg_1n parallel, welche die Perpendikel P_1M_1, P_2M_2 resp. in m, n schneidet; so sind die Dreiecke P_1g_1m, P_2g_1n einander ähnlich und folglich ist nach §. 46.:

$$\frac{P_1m}{P_2n}=\frac{P_1g_1}{P_2g_1}=\frac{P_2}{P_1};\ \text{folglich}\ P_1.P_1m=P_2.P_2n$$

oder $P_1\ (M_1m-M_1P_1)=P_2\ (M_2P_2-M_2n)$

oder weil $M_1m=M_2n=g_1h_1$ ist:

$$(P_1+P_2)\ g_1h_1=P_1.P_1M_1+P_2.P_2M_2.$$

Ebenso hat man, da nach §. 60. $(P_1+P_2)\ g_1g_2=P_3.P_3g_2$ ist:

$$(P_1+P_2+P_3)\ g_2h_2=(P_1+P_2)\ g_1h_1+P_3.P_3M_3$$
$$=P_1.P_1M_1+P_2.P_2M_2+P_3.P_3M_3$$

und

$$(P_1+P_2+P_3+P_4)\ g_3h_3=(P_1+P_2+P_3)\ g_2h_2+P_4.P_4M_4$$
$$=P_1.P_1M_1+P_2.P_2M_2+P_3.P_3M_3+P_4.P_4M_4,$$

und auf ähnliche Weise ist für eine beliebige Anzahl von Kräften:

$$(P_1+P_2+P_3+\ldots)\,GH$$
$$=P_1.P_1M_1+P_2.P_2M_2+P_3.P_3M_3+\ldots.$$

also: $$GH=\frac{P_1.P_1M_1+P_2.P_2M_2+P_3.P_3M_3+\ldots.}{P_1+P_2+P_3+\ldots.}$$

Wenn wir also in dieser Entfernung zu Ax eine Parallele Kk ziehen, so muss der Punkt G in dieser Linie liegen. Ebenso, wenn wir irgend eine andere Linie Ay ziehen, so können wir die Entfernung des Punktes G von derselben bestimmen, und wenn wir in dieser Entfernung zu Ay eine Parallele Hh ziehen, so gibt der Durchschnitt von Hh mit Kk den Schwerpunkt G.

Zusatz. Wenn P_1M_1, $P_2'M_2$, ... und GH statt auf Ax senkrecht, nach irgend einer andern Richtung parallel zu einander gezogen wären, und Ax resp. in M_1, M_2, ... und H schnitten, so wäre immer wieder:

$$GH=\frac{P_1.P_1M_1+P_2.P_2M_2+P_3.P_3M_3+\ldots}{P_1+P_2+P_3+\ldots}.$$

§. 63. Aufgabe. Den Schwerpunkt irgend eines Systemes schwerer Punkte P_1, P_2, P_3, ... (Fig. 62.), welche eine beliebige Lage im Raume haben, zu finden.

Wenn man irgend eine Ebene yAx annimmt, und von den schweren Punkten auf dieselbe die Perpendikel P_1M_1, P_2M_2, P_3M_3, ..., so wie von den Schwerpunkten von P_1 und P_2, von P_1, P_2, P_3, ... die Perpendikel g_1h_1, g_2h_2, ... und von dem Schwerpunkte des ganzen Systemes das Perpendikel GH fällt; so ist nach dem vorhergehenden §., da P_1M_1, P_2M_2, g_1h_1 in derselben Ebene liegen und auf M_1M_2 senkrecht sind:

$$(P_1+P_2).g_1h_1=P_1.P_1M_1+P_2.P_2M_2$$

und ebenso ist, da g_1h_1, g_2h_2, P_3M_3 in derselben Ebene liegen:

$$(P_1+P_2+P_3)\,g_2h_2=(P_1+P_2)\,g_1h_1+P_3.P_3M_3$$
$$=P_1.P_1M_1+P_2.P_2M_2+P_3.P_3M_3$$

und für eine beliebige Anzahl von Körpern:

$$(P_1+P_2P_3..)\,GH'=P_1P_1M_1+P_2.P_2M_2+P_3.P_3M_3;$$

also $$GH=\frac{P_1.P_1M_1+P_2.P_2M_2+P_3.P_3M_3+\ldots}{P_1+P_2+P_3\ldots}.$$

Wenn wir also in dieser bekannten Entfernung zu der Ebene xAy eine parallele Ebene legen, so muss der Punkt G in dieser Ebene liegen.

Nehmen wir ferner noch zwei andere, nicht unter sich und zu yAx parallele Ellenen xAz und yAz an, und bestimmen ebenso die Entfernung des Punktes G von jeder derselben; so können wir in dieser Ent=

fernung von jeder der beiden letzten Ebenen zu ihnen zwei andere parallele Ebenen legen, so dass sich der Punkt G in jeder derselben befinden muss. Folglich muss der Punkt G im Durchschnittspunkte der drei Ebenen xAy, xAz und yAz liegen.

§. 54. Lehrsatz. Irgend ein System von schweren Körpern P_1, P_2, P_3, ... (Fig. 60.) bringt in Beziehung auf das Gleichgewicht dieselbe Wirkung hervor, als wenn ihre Massen in dem Schwerpunkte des Systemes vereinigt wären.

Das System sei um einen Punkt oder eine Linie im Gleichgewichte, durch diesen Punkt oder diese Linie sei eine Verticalebene gelegt, und P_1M_1, P_2M_2, ... seien Perpendikel auf diese Ebene, so ist die Wirkung in Beziehung auf die Hervorbringung des Gleichgewichtes um diese Ebene dieselbe, so lange das Moment $P_1.P_1M_1 + P_2.P_2M_2 + P_3.P_3M_3 + \ldots$ dasselbe ist (§. 22.).

Aber wenn das ganze System als in dem Punkte G concentrirt angenommen wird, so wird dieses Moment $= (P_1 + P_2 + P_3 + \ldots.)$ GH, und ist nach §. 62. gleich dem vorhergehenden Momente, welche Lage die Ebene auch haben mag, und folglich bleibt die Wirkung ganz dieselbe wie zuvor.

Es ist bereits §. 60. Zus. 4. gezeigt worden, dass, wenn der Schwerpunkt fest ist, der auf denselben ausgeübte Druck derselbe ist, als wenn die Masse der einzelnen Körper in diesem Punkte vereinigt wäre.

Zusatz. Wenn daher P_1, P_2, P_3, P_4, ... (Fig. 60.) nicht blos schwere Punkte, sondern Körper von endlicher Größe sind, so wird der Schwerpunkt des Systemes gefunden, wenn man sich die Masse jedes Körpers als in seinem eigenen Schwerpunkt vereinigt vorstellt, und dann wie in §. 60., 61. oder 62. verfährt.

§. 65. Beispiele der Bestimmung des Schwerpunktes.

Beispiel 1. Den Schwerpunkt einer geraden Linie von gleichförmiger Dicke und Dichtigkeit zu finden.

Eine gerade Linie ist um ihren Mittelpunkt in jeder Lage von selbst im Gleichgewichte, und dieser Punkt ist daher der Schwerpunkt derselben.

Beispiel 2. Den Schwerpunkt eines Parallelogrammes AB CD (Fig. 63.) zu finden.

Man halbire die gegenüberliegenden Seiten AB und DC in E und F und die gegenüberliegenden Seiten AD und BC in H und K, so schneiden sich die Verbindungslinien EF, HK der Halbirungspunkte in dem gesuchten Schwerpunkte G; denn man kann sich das

Parallelogramm als aus lauter zu AB parallelen geradlinigen Reihen von schweren Theilchen, wie PMQ zusammengesetzt vorstellen, und da PM=AE=EB=MQ ist, so ist jede der Reihen wie PQ um ihren Mittelpunkt M, d. h. an der Linie EF im Gleichgewichte, und folglich ist das ganze Parallelogramm an der Linie EF im Gleichgewichte. Ebenso ist das ganze Parallelogramm an der Linie HK im Gleichgewichte, und folglich ist es in jeder Lage um den Punkt G im Gleichgewichte, welcher daher der gesuchte Schwerpunkt ist.

Beispiel 3. Den Schwerpunkt eines Dreieckes ABC (Fig. 64.) zu finden.

Man halbire AB in E und AC in F und ziehe CE, BF, so ist der Durchschnittspunkt G der gesuchte Schwerpunkt; denn das Dreieck kann als aus lauter zu AB parallelen Reihen schwerer Theilchen, wie die Reihe PQ bestehend angesehen werden, und die ähnlichen Dreiecke geben alsdann:

$\frac{PM}{AE}=\frac{MC}{EC}=\frac{MQ}{EB}$, und folglich $PM=MQ$, weil $AE=EB$ ist.

Jede Reihe schwerer Theilchen wie PQ ist also an der Linie CE in jeder Lage im Gleichgewichte, und folglich ist das ganze Dreieck an dieser Linie im Gleichgewichte. Ebenso ist das ganze Dreieck in jeder Lage an der Linie BF im Gleichgewichte, und folglich auch in jeder Lage an dem Durchschnittspunkte G, welcher daher der gesuchte Schwerpunkt ist.

Man ziehe FE, so ist, da $EA=\frac{1}{2}AB$ und $AF=\frac{1}{2}AC$ ist, auch EF parallel zu BC; folglich sind die Dreiecke AEF und ABC einander ähnlich; also:

$$\frac{EF}{BC}=\frac{AE}{AB}=\frac{1}{2}$$

und wegen der ähnlichen Dreiecke EFG, CBG ist auch:

$\frac{EG}{GC}=\frac{EF}{BC}=\frac{1}{2}$, also $GC=2EG$ und $EC=3EG$;

folglich: $EG=\frac{1}{3}EC$ und $GC=\frac{2}{3}EC$.

Zusatz 1. Wenn wir die den Winkeln A, B, C gegenüberliegenden Seiten resp. mit a, b, c bezeichnen und $CE=e$, $AE=EB=\frac{c}{2}$ setzen, so haben wir:

$$e^2=\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}\ ^*);$$

*) Wenn in irgend einem Dreiecke ABC (Fig. 64.) eine Seite AB in E halbirt wird, so ist bei der Bezeichnung im Texte:

folglich: $$CG=\frac{2}{3}e=\frac{[2(a^2+b^2)-c^2]^{\frac{1}{2}}}{3}.$$

Zusatz 2. Wenn wir $GA=h$, $GB=k$ und $GC=l$ setzen, so ist $l=\frac{2}{3}e$; also:

$$3l=[2(a^2+b^2)-c^2]^{\frac{1}{2}};$$

folglich: $$9l^2=2a^2+2b^2-c^2.$$

Ebenso ist: $$9\,2^2=2b^2+2c^2-a^2,$$

und: $$9k^2=2c^2+2a^2-b^2;$$

folglich, wenn man diese drei Gleichungen addirt:

$$9(h^2+k^2+l^2)=3(a^2+b^2+c^2),$$

oder: $$3(h^2+k^2+l^2)=a^2+b^2+c^2.$$

Zusatz 3. Wenn in die drei Winkelspitzen eines Dreieckes die Schwerpunkte dreier Körper gebracht werden, so hat das System dieser drei Körper denselben Schwerpunkt als das Dreieck.

Zusatz 4. Um den Schwerpunkt eines beliebigen Vieleckes zu finden, zerlege man dasselbe in Dreiecke, denke sich die Masse eines jeden der letztern in seinem Schwerpunkte concentrirt und bestimme den Schwerpunkt aller dieser schweren Punkte, so ist derselbe nach §. 64. Zus. der Schwerpunkt des Vieleckes.

Beispiel 4. Den Schwerpunkt eines Viereckes $ACBC'$ (Fig. 65.), worin die beiden an einanderstoßenden Seiten AC, BC, so wie AC', BC' einander gleich sind, zu finden.

Man ziehe die Linie CC', so halbirt dieselbe AB in D und ist senkrecht auf AB. Es sei E der Schwerpunkt des Dreieckes ABC und F der des Dreieckes ABC', so ist G der Schwerpunkt des Viereckes, wenn man diesen Punkt auf der Linie CC' so nimmt, dass sich verhält:

$$EG:FG=ABC':ABC=DC':DC;$$

folglich: $$EG:EF=DC':CC',\text{ also }EG=\frac{DC'.EF}{CC'}.$$

---

in dem Dreiecke ACE, $$b^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2+e^2-2\frac{c}{2}e\cos CEA,$$

in dem Dreiecke BCE, $$a^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2+e^2+2\frac{c}{2}e\cos CEA$$

und folglich: $$a^2+b^2=\frac{c^2}{2}+2e^2,$$

woraus sich die Formel im Texte ergibt.

Es sei $DC=c$, $DC'=c'$, so ist $DE=\frac{c}{3}$, $DF=\frac{c'}{3}$, $EF=\frac{c+c'}{3}$, also $EG=\frac{c'}{c+c'}.\frac{c+c'}{3}=\frac{c'}{3}$, und $DG=DE-EG=\frac{c}{3}-\frac{c'}{3}=\frac{c-c'}{3}$.

Zusatz. Ebenso, wenn die Punkte C und C′ auf derselben Seite von AB lägen, so wäre:

$$DG=\frac{c+c'}{3}.$$

Beispiel 5. Den Schwerpunkt eines Trapezes ABDC (Fig. 66.) zu finden, worin AB und CD die parallelen Seiten sind.

Man halbire die Seiten AB, CD resp. in H und K und ziehe HK, so sind alle zu AB parallelen Reihen schwerer Punkte des Trapezes um die Linie HK im Gleichgewichte, und folglich liegt der Schwerpunkt desselben in dieser Linie. Man ziehe BC, CH, BK, nehme $CE=\frac{2}{3}CH$ und $BF=\frac{2}{3}BK$, so sind E und F resp. die Schwerpunkte der Dreiecke ABC, DBC, deren Masse man sich nach §. 64. Zus. als in diesen Punkten vereinigt denken kann. Wenn also EM, FN parallel zu HK sind, und G ist der gesuchte Schwerpunkt, so ist nach §. 62. Zus.

$$GH=\frac{\text{Dreieck ABC}\times EM+\text{Dreieck BCD}\times FN}{\text{Dreieck ABC}+\text{Dreieck BCD}}.$$

Es sei CL parallel zu HK, und CI senkrecht auf AB, so geben die ähnlichen Dreiecke:

$$\frac{EM}{CL}=\frac{HE}{HC}=\frac{1}{3};\quad \frac{FN}{KH}=\frac{BF}{BK}=\frac{2}{3},$$

also: $EM=\frac{1}{3}CL=\frac{1}{3}KH$, $FN=\frac{2}{3}KH$;

folglich:
$$GH=\frac{\frac{1}{2}AB.CI.\frac{1}{3}KH+\frac{1}{2}CD.CI.\frac{2}{3}KH}{\frac{1}{2}AB.CI+\frac{1}{2}CD.CI}$$
$$=\frac{AB.KH+2CD.KH}{3(AB+CD)}.$$

Wenn $AB=a$, $CB=b$, $KH=c$ gesetzt wird, so ist:

$$GH=\frac{c}{3}.\frac{a+2b}{a+b}.$$

Zusatz. Wenn $b=o$ ist, so wird $GH=\frac{c}{3}$, und das Trapez geht über in ein Dreieck.

Beispiel 6. Den Schwerpunkt einer Pyramide zu finden, deren Grundfläche das Dreieck ABC (Fig. 67.) ist, und deren Spitze in O liegt.

Man halbire BC in D, ziehe AD, OD, nehme $DE=\frac{1}{3}DA$, $DF=\frac{1}{3}DO$ und ziehe OE, AF, so ist ihr Durchschnittspunkt G der Schwerpunkt der Pyramide. Denn die Pyramide kann als aus lauter zu der Grundfläche ABC parallelen Schichten schwerer Theilchen, wie PQR zusammengesetzt betrachtet werden, und da E der Schwerpunkt des Dreieckes ABC ist, so erhellet leicht, dass der Punkt N, wo die Linie OE die Schicht PQR trifft, der Schwerpunkt der letztern ist. Es ist also jedes Dreieck PQR an der Linie OE im Gleichgewichte und folglich ist auch die ganze Pyramide in jeder Lage an der Linie OE im Gleichgewichte. Ebenso ergibt sich, dass die ganze Pyramide in jeder Lage an der Linie AF im Gleichgewichte ist, und folglich ist sie auch in jeder Lage an dem Durchschnittspunkte G im Gleichgewichte, welcher daher der gesuchte Schwerpunkt ist.

Vermöge der ähnlichen Dreiecke ist aber:

$$\frac{EF}{AO}=\frac{ED}{AD}=\frac{1}{3} \text{ und } \frac{EG}{GO}=\frac{EF}{AO}=\frac{1}{3}$$

folglich: $GO=3EG$, $EG=\frac{1}{4}EO$, und $GO=\frac{3}{4}EO$.

Zusatz 1. Halbirt man AO in H und zieht HK parallel zu OE, so geben die ähnlichen Dreiecke, da $AH=\frac{1}{2}AO$ ist, $AK=\frac{1}{2}AE=DE$ und $DK=2DE$; ferner $HK=\frac{1}{2}OE$ und $GE=\frac{1}{4}OE$; also $HK=2GE$. Es verhält sich also $DE:DK=GE:HK$, und folglich ist DGH eine gerade Linie, welche in G halbirt wird. Wir haben also folgenden Lehrsatz: Wenn man zwei nicht zusammenstoßende Kanten einer dreiseitigen Pyramide halbirt, die Halbirungspunkte durch eine gerade Linie verbindet, und die letztere in zwei gleiche Theile theilt, so ist der letzte Halbirungspunkt der Schwerpunkt der Pyramide.

Zusatz 2. Um die Länge OG zu finden, wollen wir die in der Spitze O zusammenstoßenden Kanten der Pyramide, nämlich OA, OB, OC resp. mit a, b, c, die übrigen BC, CA, AB resp. mit a', b', c' und die Linien AD, OD, OE resp. mit e, f, g, bezeichnen; so haben wir:

$$g^2=\frac{6f^2+3a^2-2e^2}{9} \text{ *)}$$

*) Wenn in irgend einem Dreiecke AOD (Fig. 67.) eine Seite AD so getheilt wird, dass $DE=\frac{1}{3}DA$ ist, so hat man mit Beibehaltung der Bezeichnung im Texte:

und nach Zuf. 1. in Beifpiel 3 haben wir:

$$c^2 = \frac{2b'^2 + 2c'^2 - a'^2}{4},$$

$$f^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4};$$

folglich, wenn wir fubftituiren:

$$g^2 = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2) - (a'^2 + b'^2 + c'^2)}{9}$$

und: $OG = \frac{3}{4}g = \frac{1}{4}[3(a^2 + b^2 + c^2) - (a'^2 + b'^2 + c'^2)]^{\frac{1}{2}}$.

Zufatz 3. Wenn wir den Schwerpunkt mit jeder der vier Ecken O, A, B, C durch gerade Linien verbinden und ihre Längen refp. mit h, k, l, m bezeichnen, fo laffen fich aus dem Vorhergehenden leicht die Werthe von h^2, k^2, l^2, m^2 ableiten, und wenn man diefe Werthe zufammenaddirt, fo erhält man:

$$4(h^2 + k^2 + l^2 + m^2) = a^2 + b^2 + c^2 + a'^2 + b'^2 + c'^2.$$

Zufatz 4. Da $EG = \frac{1}{4}EO$ ift, fo ift einleuchtend, daff, wenn man durch G und O parallele Linien zieht, welche die Grundfläche treffen, die Entfernung des Punktes G von diefer Ebene $= \frac{1}{4}$ der Entfernung der Spitze O von derfelben Ebene ift.

Beifpiel 7. Den Schwerpunkt einer Pyramide zu finden, deren Grundfläche ein Vieleck ABCDF (Fig. 68.), und deren Spitze der Punkt O ift.

Man theile das Vieleck durch gerade Linien, die von derfelben Winkelfpitze nach den übrigen gezogen find, in Dreiecke, und lege durch diefe Theilungslinien und die Spitze der Pyramide Ebenen, fo wird die Pyramide in lauter dreifeitige zerlegt. Legt man alsdann zu der Grundfläche in einer Entfernung, welche dem vierten Theile der Höhe der Pyramide gleich ift, eine parallele Ebene, fo liegt nach Zuf. 4. des vorhergehenden Beifpieles der Schwerpunkt jeder dreifeitigen Pyramide in diefer Ebene, und folglich auch der der ganzen vielfeitigen Py-

---

in dem Dreiecke DOE, $f^2 = \left(\frac{e}{3}\right)^2 + g^2 + 2 \cdot \frac{e}{3} g \cdot \cos OEA$,

und in dem Dreiecke AOE, $a^2 = \left(\frac{2e}{3}\right)^2 + g^2 - 2 \cdot \frac{2e}{3} \cdot g \cdot \cos \cdot OEA$,

und wenn man die doppelte erfte Gleichung zu der zweiten addirt, fo hat man

$$2f^2 + a^2 = \frac{6e^2}{9} + 3g^2,$$

woraus die Formel im Texte folgt.

ramide. Verbindet man aber die Spitze O mit dem Schwerpunkte F der Grundfläche, so erhellet, wie in dem letzten Beispiele, dass der Schwerpunkt der ganzen Pyramide in dieser Linie liegt, und folglich liegt er in dem Punkte G, wo die Linie OF die zu der Grundfläche parallele Ebene trifft, und es ist offenbar $FG = \frac{1}{4}FO$ und $OG = \frac{3}{4}OF$.

Zusatz. Wenn die Anzahl der Seiten der vieleckigen Grundfläche der Pyramide unbegrenzt zunimmt, so bleibt das Verfahren zur Bestimmung des Schwerpunktes noch immer dasselbe, und folglich ist es auch auf einen Kegel mit einer beliebigen krummlinigen Grundfläche anwendbar, und in allen solchen Fällen liegt der Schwerpunkt des Körpers auf der Verbindungslinie der Spitze mit dem Schwerpunkte der Grundfläche um $\frac{3}{4}$ der Länge dieser Linie von der Spitze und $\frac{1}{4}$ von der Grundfläche entfernt.

Beispiel 8. Den Schwerpunkt einer parallel zu der Grundfläche abgestumpften Pyramide zu finden.

Die beiden Grundflächen sind ähnliche Figuren, und es seien a, b ähnlich liegende Seiten derselben. Die Schwerpunkte der beiden Grundflächen verbinde man durch eine gerade Linie, welche die Axe genannt wird, und $= c$ sei, so liegt der Schwerpunkt der abgestumpften Pyramide in dieser Axe, und wie in Beispiel 5. ergibt sich, daß er auf dieser Axe von der größern Grundfläche um eine Länge entfernt ist, welche ausgedrückt wird durch:

$$\frac{c}{4} \cdot \frac{a^2 + 2ab + 3b^2}{a^2 + ab + b^2}.$$

Zusatz. Dasselbe gilt von dem parallel zur Grundfläche abgestumpften Kegel, wenn a und b die Halbmesser, oder irgend welche homologen Linien der beiden Grundflächen bezeichnen.

Allgemeine Eigenschaften des Schwerpunktes.

§. 66. Lehrsatz. Wenn man in einem aus einer beliebigen Anzahl schwerer Theilchen bestehenden Systeme einen Punkt annimmt, und multiplicirt die Masse oder das Gewicht jedes Theilchens mit dem Quadrate seiner Entfernung von diesem Punkte, so ist die Summe dieser Producte am kleinsten, wenn der erwähnte Punkt der Schwerpunkt des Systemes ist.

Es sei O (Fig. 69.) der erwähnte Punkt und G der Schwerpunkt von $P_1, P_2, \ldots$. Man ziehe die Linie GO, fülle auf sie die Perpendikel $G_1M_1, P_2M_2, \ldots$ und ziehe $P_1G, P_2G, \ldots P_1O, P_2O, \ldots$ so ist:

$$P_1 O^2 = P_1 G^2 + G O^2 - 2 G O . G M_1$$
$$P_2 O^2 = P_2 G^2 + G O^2 - 2 G O . G M_2$$
$$\text{etc.} = \text{etc.}$$

folglich:
$$P_1 . P_1 O^2 + P_2 . P_2 O^2 + \text{etc.}$$
$$= P_1 . P_1 G^2 + P_2 . P_2 G^2 + \text{etc.}$$
$$+ P_1 . G O^2 + P_2 . G O^2 + \text{etc.}$$
$$- 2 P_1 . G O . G M_1 - 2 P_2 . G O . G M_2 - \text{etc.}$$
$$= P_1 . P_1 G^2 + P_2 . P_2 G^2 + \text{etc.}$$
$$+ (P_1 + P_2 + \text{etc.}) G O^2$$
$$- 2 G O (P_1 . G M_1 + P_2 . G M_2 - P_3 . G M_3 - P_4 . G M_4).$$

Aber vermöge der Eigenschaft des Schwerpunktes ist:

$$P_1 . G M_1 + P_2 . G M_2 - P_3 . G M_3 - P_4 . G M_4 = 0$$

also:
$$P_1 . P_1 O^2 + P_2 . P_2 O^2 + P_3 . P_3 O^2 + P_4 . P_4 O^2$$
$$= P_1 . P_1 G^2 + P_2 . P_2 G^2 + P_3 . P_3 G^2 + P_4 . P_4 G^2$$
$$+ (P_1 + P_2 + P_3 + P_4) G O^2,$$

und es ist einleuchtend, dass der zweite Theil dieser letzten Gleichung desto kleiner wird, je kleiner GO ist, und seinen kleinsten Werth bekommt, wenn $GO = o$ ist, oder wenn der Punkt O mit dem Schwerpunkte G zusammenfällt.

Zusatz. Wenn man aus dem Schwerpunkte G mit dem Halbmesser GO einen Kreis beschreibt, so ist die Summe der Produkte aus der Masse jedes Theilchens und dem Quadrate seiner Entfernung von dem Punkte O immer dieselbe, in welchem Punkte dieses Kreisumfanges O auch liegen mag; denn die Länge GO ist für alle Lagen des Punktes O dieselbe.

§. 67. Lehrsatz. Wenn irgend eine Maschine unter der Wirkung zweier Gewichte im Gleichgewichte ist, und man ertheilt derselben eine beliebig kleine Bewegung, so wird der Schwerpunkt der Gewichte weder steigen noch fallen.

Dieser Satz lässt sich für jede der einzelnen mechanischen Potenzen leicht nachweisen.

Bei dem geradlinigen Hebel liegt der Schwerpunkt in dem Unterstützungspunkte, und bleibt in Ruhe, wie sich der Hebel auch bewegen mag.

Bei dem Rade an der Welle (Fig. 38.) liegt der Schwerpunkt von P und W in G, in der durch den Mittelpunkt C gehenden Ver-

ticale, und wenn P sinkt, so steigt W und der Schwerpunkt G bleibt unbeweglich, wie wenn PGW ein Hebel wäre.

Bei den Zahnrädern (Fig. 54.) bleibt der Schwerpunkt G unbeweglich, indem P sich aufwärts und W niederwärts bewegt, und es verhält sich:

$$PG:WG=DO:CO.$$

Wenn man in den Rollensystemen (Fig. 41., 42., 43., 44., 45.) P und W durch eine gerade Linie mit einander verbindet, und in derselben den Punkt G so nimmt, dass sich verhält:

$$PG:WG=W:P,$$

so ist G der Schwerpunkt von P und W, und wenn sich P niederwärts und W aufwärts bewegt, so verhält sich: Niedersteigen von P: Aufsteigen von $W=W:P=PG:WG$, und folglich bleibt der Punkt G unbeweglich.

Wenn bei der geneigten Ebene (Fig. 58.) die Kraft P parallel zu derselben wirkt, indem sie der Last W das Gleichgewicht hält und P sinkt nach p herab, so steigt W nach w auf, und es ist $Pp=Ww$.

Zieht man alsdann die Linie wp, welche WP in g schneidet, und fällt auf WP das Perpendikel wm, so geben die ähnlichen Dreiecke:

$$wg:pg=wm:Pp=wm:Ww=BC:AC=P:W.$$

Folglich ist g der Schwerpunkt von p und w, und es hat sich mithin der Schwerpunkt in der horizontalen Linie Gg bewegt. Dasselbe ist der Fall, wie groß oder klein die beschriebenen Räume auch sein mögen.

Auf den Keil und die Schraube wirkt im Allgemeinen die Schwerkraft nicht als bewegende Kraft; aber wenn es der Fall ist, so läßt sich dieselbe Eigenschaft auch bei ihnen leicht darthun.

Fünftes Kapitel.

Aufgaben über das Gleichgewicht starrer Körper.

§. 68. Die Körper sind entweder hart oder weich, starr oder biegsam, ausdehnbar oder unausdehnbar, elastisch oder unelastisch, und in allen Fällen lassen sich die Bedingungen ihres Gleichgewichtes aus den Eigenschaften des Hebels ableiten, welche, wie wir gesehen haben, zu denen der übrigen mechanischen Verbindungen führen. Gegenwärtig wollen wir blos das Gleichgewicht starrer Körper betrachten,

d. h. solcher, bei welchen sich weder die Dimensionen, noch die Gestalt ihrer Theile ändert, wenn irgend welche Kräfte darauf wirken.

Aufgabe. Wenn ein Hebel unter der Wirkung irgend zweier Kräfte im Gleichgewichte ist, den Druck auf den Unterstützungspunkt zu finden.

Es sei ACB (Fig. 70.) ein Hebel, auf welchen zwei Kräfte P und Q wirken, indem der Hebel und die beiden Kräfte in derselben Ebene liegen. Wir wollen annehmen, dass ein Theil EF dieser Ebene mit Einschluss des Hebels als materiell und starr betrachtet werde, um den Punkt C in dieser Ebene beweglich sei, und dass die Kräfte P und Q daran wirken; so wird dieser Theil der Ebene ganz eben so im Gleichgewichte erhalten, wie der Hebel, und wenn CM, CN Perpendikel auf die Richtungen der Kräfte sind, so haben wir die Proportion: $P:Q=CN:CM.$

Die Richtungen der Kräfte mögen sich in D schneiden, und es seien Cp, Cq parallel zu BD, AD, so ist der Winkel $CqN=CpM$ und die Dreiecke CqN, CpM sind einander ähnlich; folglich verhält sich: $CN:CM=Cq:Cp;$

folglich: $P:Q=Cq:Cp;$

d. h. $P:Q=Dp:Dq.$

Es können also die Linien Dp, Dq die Kräfte P und Q ausdrücken, und DC drückt alsdann ihre Mittelkraft aus, wenn sie in D wirkt.

Aber die Kraft P bringt dieselbe Wirkung hervor, wenn sie an irgend einem andern Punkte ihrer Richtung AD angebracht ist, und AD als eine materielle unveränderliche Linie betrachtet wird.

Dasselbe gilt von der Kraft Q; folglich bringen die Kräfte P und Q dieselbe Wirkung hervor, als wenn sie in D wirkten, und sie bringen folglich auf den Punkt C einen Druck hervor, welcher ihrer Mittelkraft gleich ist.

Nun bleibt aber der Druck auf den Punkt C derselbe, wenn irgend ein Theil der materiellen Ebene hinweg genommen wird, so dass davon nur noch die materielle Linie ACB übrig bleibt, welche den Hebel bildet, und folglich wird der Druck auf den Unterstützungspunkt C der Größe und Richtung nach durch die Mittelkraft aus den beiden Kräften P und Q, welche den Hebel im Gleichgewichte erhalten, ausgedrückt. Dieser Druck wirkt also nach der Richtung der geraden Linie, welche den Durchschnittspunkt der Richtungen der beiden Kräfte P und Q mit dem Unterstützungspunkte verbindet.

Zusatz 1. Wenn auf den Punkt C in der Richtung CD eine Kraft R wirkt, welche der Mittelkraft aus P und Q gleich ist, so halten die drei Kräfte P, Q, R die materielle Linie ACB im Gleichgewichte; vorausgesetzt, dass kein Punkt derselben fest ist.

Zusatz 2. Wenn die Kräfte P und Q parallel sind, so ist nach §. 18. der Druck auf den Unterstützungspunkt ihrer Summe gleich, und zu ihnen parallel, und aus demselben §. erhellet, dass die Entfernungen der Druckkraft von den beiden Kräften P und Q letztern umgekehrt proportional sind.

Zusatz 3. Hieraus erhellet, dass zwei parallele Kräfte dieselbe Wirkung hervorbringen, als eine Kraft, welche ihrer Summe gleich ist, in einer zu ihnen parallelen Richtung wirkt, und eine solche Entfernung von jeder der beiden Kräfte hat, dass sich diese Entfernungen umgekehrt wie diese Kräfte verhalten.

§. 69. Lehrsatz. Bei einem Hebel, auf welchen eine beliebige Anzahl in derselben Ebene liegende Kräfte wirken, ist der Druck auf den Unterstützungspunkt der in diesem Punkte wirkenden Mittelkraft aus allen den einzelnen Kräften gleich.

Auf den vielarmigen Hebel CA, CB, ... (Fig. 71.) mögen die Kräfte P, Q, ... und P′, Q′, ... wirken. Die Richtungen der Kräfte P und P′ mögen sich in D schneiden, und R sei ihre nach der Richtung DR wirkende Mittelkraft. Die Richtung DR schneide die der Kraft Q in E, und es sei R′ die nach der Richtung ER′ wirkende Mittelkraft von R und Q. Ferner schneide die Richtung ER′ die der Kraft Q′ in F und S sei die Mittelkraft aus R′ und Q′, so drückt sie den Druck auf den Unterstützungspunkt aus. Denn da eine Kraft dieselbe Wirkung hervorbringt, an welchem Punkte ihrer Richtung sie auch wirken mag, so bringen die Kräfte P und P′ dieselbe Wirkung hervor, als wenn sie an dem Punkte D wirkten, und folglich dieselbe Wirkung als die Kraft R. Ebenso bringen die Kräfte R und Q dieselbe Wirkung hervor, als wenn sie in E wirkten, und folglich dieselbe Wirkung als die Kraft R′, und die Kräfte R′ und Q′ bringen dieselbe Wirkung hervor, als wenn sie an dem Punkte F wirkten und also dieselbe Wirkung wie die Kraft S. Die Kräfte P, P′, Q, Q′ bringen also dieselbe Wirkung hervor als die Kraft S, erhalten aber das System um den Punkt C im Gleichgewicht; folglich auch die Kraft S; ihre Richtung geht also durch den Punkt C und übt auf denselben einen Druck = S aus. Folglich wird auch durch die vereinte Wirkung der Kräfte P, P′, Q, Q′, ein Druck auf den Punkt C ausgeübt, welcher = S ist.

Ferner, da die Wirkung der Kraft R an dem Punkte D der Wirkung der Kräfte P, P′ gleich ist, so ist auch die Wirkung der Kraft R auf den Punkt E gleich der Wirkung der Kräfte P und P′ auf diesen Punkt; folglich ist die Wirkung der Kräfte R und Q oder die der Kraft R′ auf den Punkt E gleich der Wirkung der Kräfte P, P′, Q auf diesen Punkt; mithin ist auch die Wirkung der Kraft R auf den Punkt F der der Kräfte P, P′, Q auf diesen Punkt gleich, und endlich ist die Wirkung der Kräfte R′ und Q′ oder die der Kraft S auf den Punkt C gleich der Wirkung der Kräfte P, P′, Q, Q′ auf denselben Punkt. Folglich ist der Druck auf den Unterstützungspunkt der an diesem Punkte angebrachten Mittelkraft aus allen einzelnen Kräften gleich, und sie wirkt nach der Richtung CF; denn die nach der Richtung FS wirkende Kraft bringt dieselbe Wirkung hervor, als die Kräfte P, P′, Q, Q′. Aber diese letzten Kräfte halten den Hebel um den Punkt C im Gleichgewichte; folglich strebt auch die nach FS wirkende Kraft, den Hebel nicht um diesen Punkt zu drehen und geht folglich durch diesen Punkt.

Zusatz. Wenn also AB A′B′ ein starrer Körper wäre, auf welchen die Kräfte P, Q, P′, Q′, so wie nach der Richtung FC die Kraft S wirkten, so würde sich dieser Körper unter der Wirkung dieser Kräfte im Gleichgewichte befinden, wofern kein Punkt des Körpers fest ist; denn die auf diese Weise wirkende Kraft S bringt dieselbe Wirkung hervor als ein fester Punkt.

§. 70. Lehrsatz. Wenn drei Kräfte auf einen Körper wirken und denselben im Gleichgewichte erhalten, so muß 1, eine derselben der Mittelkraft aus den beiden andern gleich und entgegengesetzt sein, und 2, muß ihre Richtung durch den Durchschnittspunkt der Richtungen der beiden andern Kräfte gehen.

Auf einen Körper EF (Fig. 70.) mögen drei Kräfte P, Q, R wirken, welche denselben im Gleichgewichte erhalten. In der Richtung einer dieser Kräfte, z. B. R nehme man einen Punkt C als fest an, so bringt die Rückwirkung desselben dieselbe Wirkung hervor, als die Kraft R; aber alsdann ist nach §. 68. die Rückwirkung der Mittelkraft aus den beiden Kräften P und Q gleich, und geht durch den Durchschnittspunkt ihrer Richtungen. Folglich leistet die Kraft R den beiden obigen Bedingungen Genüge, und ebenso ergiebt sich die Richtigkeit des Lehrsatzes in Beziehung auf die beiden Kräfte P und Q.

Zusatz. Desgleichen, wenn auf einen starren Körper eine beliebige Anzahl von Kräften, P, Q, ... und S (Fig. 68.) wirken und denselben im Gleichgewichte erhalten, so muß eine derselben, z.

B. S, der Mittelkraft aus allen übrigen gleich sein (§. 69.) Sie muß also durch den in §. 69. bestimmten Punkt F gehen und ihre Richtung muß der Richtung der Mittelkraft aus den übrigen Kräften entgegengesetzt sein.

Wir wollen nun an einzelnen Beispielen zeigen, wie man in besondern Fällen die Bedingungen des Gleichgewichtes eines starren Körpers bestimmt.

I. Gleichgewicht um einen Punkt.

§. 71. Wenn sich ein starrer Körper um einen festen Punkt bewegen kann, so lassen sich die Bedingungen seines Gleichgewichtes unmittelbar auf die des Hebels zurückführen, dessen Unterstützungspunkt der feste Punkt ist, wofern das als in dem Schwerpunkte des Körpers vereinigte Gewicht desselben mit zu den auf den Hebel wirkenden Kräften genommen wird.

Aufgabe I. Wenn an einer gewöhnlichen Wage ungleiche Gewichte wirken, die Lage ihres Gleichgewichtes zu finden.

Die gewöhnliche Wage besteht aus einem Wagebalken AB (Fig. 72.), welcher um eine Axe C beweglich ist, und woran die Wagschalen in den Punkten A und B aufgehangen sind. Die Axe C hat eine solche Lage, dass sie, wenn der Wagebalken horizontal steht, etwas über der geraden Linie AB liegt, welche die Aufhängungspunkte der Wagschalen mit einander verbindet.

Es sei CD senkrecht auf AB, so müssen die beiden Arme DA und DB gleiche Länge und gleiches Gewicht haben. Es sei $DA = DB = a$ und $CD = b$, der Punkt G in der Linie CD der Schwerpunkt des Wagenbalkens und $CG = h$. Man ziehe die Horizontallinie MCN, welche die durch G und D gehenden Verticallinien resp. in H und E schneidet, und es sei φ der Winkel, welchen AB mit dem Horizonte bildet, und folglich auch der Winkel, welchen CD mit der Verticale macht; so ist:

$$AD = DB,\ EM = EN = a\cos\varphi$$

$$CE = b\sin\varphi,\ CH = h\sin\varphi,$$

und wenn P und Q resp. die Gewichte in A und B, und W das Gewicht des Wagenbalkens ist, so hat man:

$$P.CM = Q.CN + W.Ch$$

oder: $P[a\cos\varphi - b\sin\varphi] = Q[a\cos\varphi + b\sin\varphi] + W.h\sin\varphi;$

also: $$\operatorname{tang}\varphi = (P+Q)\frac{(P-Q)a}{(P+Q)b + Wh}.$$

Wenn D den Unterschied den beiden Gewichte bezeichnet, so daß $P = Q + D$ ist, so hat man:

$$\frac{\text{tang}\,\varphi}{D} = \frac{a}{(2Q + D)\,b + W\,h}.$$

Die Erfordernisse einer guten Wage sind folgende: 1) der Wagebalken muss horizontal stehen, wenn gleiche Gewichte daran hängen; 2) er muss sehr empfindlich sein, d. h. der Wagebalken muss merklich von der horizontalen Richtung abgelenkt werden, wenn in die eine Wagschale auch nur ein kleines Gewicht gelegt wird, und 3) der Wagebalken muss stabil sein, d. h. er muss, wenn er aus der Lage des Gleichgewichtes entfernt wird, schnell wieder in dieselbe zurückkehren.

Die erste Bedingung wird erhalten, wenn die beiden Arme des Wagebalkens einander gleich sind, und der Schwerpunkt etwas tiefer liegt als die Aufhängungsaxe. Die Empfindlichkeit der Wage ist desto größer, je größer für einen gegebenen kleinen Unterschied der Gewichte die Neigung des Wagebalkens gegen den Horizont ist, d. h. je größer für einen kleinen gegebenen Werth von D der Winkel φ ist.

Die Empfindlichkeit ist auch desto größer, je kleiner D ist für einen gegebenen Werth von φ, und kann daher durch $\frac{\varphi}{D}$ oder $\frac{\text{tang}\,\varphi}{D}$ gemessen werden. Die Empfindlichkeit der Wage wird also ausgedrückt durch:

$$\frac{a}{(2Q + D)\,b + W\,h}.$$

Da aber D gegen 2Q sehr klein ist, so kann diese Größe hinweggelassen werden und die Empfindlichkeit der Wage wird alsdann ausgedrückt durch:

$$\frac{a}{2Qb + Wh}.$$

Die Empfindlichkeit einer Wage wird also vergrößert 1) durch Vergrößerung der Arme a; 2) durch Verminderung des Gewichtes W des Wagebalkens; 3) durch die Verminderung der Entfernung h zwischen dem Drehungsmittelpunkte und dem Schwerpunkte des Wagebalkens und 4) durch die Verminderung der Entfernung b zwischen dem Schwerpunkte des Wagebalkens und der Verbindungslinie der Aufhängungspunkte der Wagschalen.

Die Stabilität verhält sich wie die Kraft, welche bei einem gegebenen Neigungswinkel des Wagebalkens denselben in die Lage des

Gleichgewichtes zurückzuführen strebt, und wenn die beiden Gewichte einander gleich sind, so wird diese Kraft ausgedrückt durch:

$$2Q.CE+W.CH=(2Qb+Wh)\sin\varphi.$$

Folglich ist das Maß der Stabilität $=2Qb+Wh$.

Zusatz. Durch Vergrößerung der Länge der Arme des Wagebalkens wird ihre Empfindlichkeit vergrößert, ohne dass ihre Stabilität vermindert wird.

Aufgabe 2. Von einem gegebenen Rechtecke AB CD (Fig. 73.) von gleichförmiger Dicke ein Dreieck CDO so abzuschneiden, dass der übrige Theil ABCO, wenn er an dem Punkte O aufgehangen ist, mit den Seiten AO, BC horizontal hängt.

Es sei G der Schwerpunkt von BO und H der von CEO; OE, Gg, Hh Verticallinien und folglich senkrecht auf AD; so ist $OG=\frac{1}{2}OA$, $Oh=\frac{1}{3}OD$, und es sei ferner $AD=a$, $AB=b$, $DO=x$, also $AO=a-x$, so ist:

Og. Rechteck $EA=Oh$. Dreieck CEO,

oder: $$\frac{a-x}{2}.b.(a-x)=\frac{x}{3}.b\frac{x}{2},$$

also: $$3(a-x)^2=x^2,$$

folglich: $$2x^2-6ax=-3a^2$$

und: $$x=\frac{a}{2}(3\pm\sqrt{3})$$

$$=0{,}634\,a.$$

Es muss hier das negative Zeichen der Wurzelgröße genommen werden, weil sonst der Punkt O hinter A fiele.

II. Gleichgewicht eines Körpers auf einer Oberfläche.

§. 61. Wenn ein Körper auf einer gegebenen Oberfläche ruht, so berührt er dieselbe entweder in einem Punkte, oder in mehrern Punkten, oder mit einem endlichen Theile seiner Oberfläche. In allen diesen Fällen muss man annehmen, dass auf den Körper Kräfte wirken, welche senkrecht sind auf der Oberfläche in den Berührungspunkten, d. h. die Reactionen der Oberfläche in diesen Punkten.

Aufgabe 3. Ein Paraboloid DAd (Fig. 74.) ruht auf einer horizontalen Ebene; man soll seine Lage bestimmen.

Wenn PK die durch den Berührungspunkt gezogene Verticale ist, welche die Axe des Paraboloides in K schneidet, so muss diese Linie durch den Schwerpunkt desselben gehen; denn wenn man sich die Masse

des Paraboloides in seinem Schwerpunkte concentrirt denkt, so muss die Gewichtskraft derselben durch die nach der Linie PK wirkende Reaction aufgehoben werden, und da der Schwerpunkt des Paraboloides ein Punkt seiner Axe ist, so muss K derselbe sein. Da ferner PK auf der Tangente im Punkte P senkrecht ist, so ist PK eine Normale, und wenn folglich PN ein Perpendikel auf der Axe ist, so ist NK gleich dem halben Parameter $= \frac{1}{2}L$ und:

$$\text{tang } AKP = \frac{NP}{NK} = \frac{\sqrt{L \cdot AN}}{\frac{1}{2}L} = 2\sqrt{\frac{AN}{L}} = 2\sqrt{\frac{AK - \frac{1}{2}L}{L}}$$

$$= 2\sqrt{\left(\frac{AK}{L} - \frac{1}{2}\right)}.$$

Wenn AK kleiner ist als $\frac{1}{2}L$, so ist diese Auflösung unmöglich, d. h. es gibt alsdann keine schiefe Lage der Axe des Paraboloides mehr, in welcher es im Gleichgewichte wäre, und es kann nur dann im Gleichgewichte sein, wenn seine Axe vertical steht. Später (in dem Supplemente) werden wir sehen, dass, wenn K der Schwerpunkt des homogenen Paraboloides ist, $AK = \frac{2}{3}AC$ ist, und folglich ist die schiefe Lage der Axe im Gleichgewichte nur so lange möglich, als $\frac{2}{3}AC > \frac{1}{2}L$ oder $AC > \frac{3}{4}L$ ist.

Aufgabe 4. Ein Körper besteht aus einem Kegel und einer Halbkugel von demselben Durchmesser, und ruht mit der Oberfläche der Halbkugel auf einer horizontalen Ebene; die Dimensionen desselben so zu bestimmen, dass er in allen Lagen im Gleichgewichte bleibt.

Die Verticale PC schneidet die Axe des Körpers in allen Lagen im Mittelpunkte der Kugel und folglich muss dieser Punkt der Schwerpunkt des ganzen Körpers sein. Es sei G der Schwerpunkt der Halbkugel und H der des Kegels, so muss folgende Gleichung stattfinden:

Masse des Kegels $\times CH =$ Masse d. Halbkugel $\times CG$.

Der Kegel ist aber $\frac{1}{3}$ und die Halbkugel $\frac{2}{3}$ des umschriebenen Cylinders; also der Kegel = Grundfl. $DE \times \frac{1}{3}BC$ und die Halbkugel = Grundfläche $DE \times \frac{2}{3}AC$. Ferner ist nach §. 65. $CH = \frac{1}{4}BC$ und nach dem Supplemente $AG = \frac{5}{8}AC$ und $CG = \frac{3}{8}AC$. Folglich:

$$\text{Basis } DE \times \tfrac{1}{3}BC \times \tfrac{1}{4}BC = \text{Basis } DE \times \tfrac{2}{3}AC \times \tfrac{3}{8}AC$$

also: $BC^2 = 3AC^2$,

folglich $BD^2 = BC^2 + CD^2 = 4AC^2$ und $BD = 2AC = DE$;

mithin ist das Dreieck DBE gleichseitig.

Aufgabe 5. Wenn ein Körper auf 3 Stützen A, B, C (Fig. 76.) ruht, den Druck auf jede derselben zu finden.

Es sei G der Schwerpunkt des Körpers, Gg eine Verticale, welche die Ebene ABC in g trifft. Man ziehe die Linie Ag, welche BC in D schneidet; so kann man, wenn man sich die ganze Masse des Körpers als in seinem Schwerpunkte concentrirt denkt, sie als an dem Hebel AD aufgehangen betrachten, und wenn W das ganze Gewicht des Körpers ist, so verhält sich:

Druck auf A : W = Dg : DA = Dreieck BgC : Dreieck BAC,

und ebenso ergibt sich:

Druck auf B (oder C) : W = Dreieck AgC (oder AgB) : Dreieck BAC.

Der Druck auf jede Stütze verhält sich also wie das ihr gegenüberliegende der Dreiecke, welche entstehen, wenn man die Winkelspitzen des Dreieckes ABC mit dem Punkte g verbindet.

Zusatz. Wenn ein Körper auf 4 verticalen Stützen ruht, wie ein Tisch auf seinen 4 Füßen, so ist der Druck auf jede unbestimmt, wenn der Körper als vollkommen starr betrachtet wird. Denn da der Körper auf 3 dieser Stützen ruhen kann, so kann die 4te entweder nichts, oder einen endlichen Theil von dem Gewichte desselben tragen. Die alleinigen Bedingungen sind, dass der auf alle Stützen zusammengenommen ausgeübte Druck dem Gewichte des Körpers gleich ist, und dass, wenn die Druckkräfte als Gewichte betrachtet werden, ihr Schwerpunkt und der des Körpers in derselben Verticallinie liegen. Dasselbe gilt für mehr als 4 Stützen.

Aufgabe 6. Ein Körper ABCD (Fig. 77. und 78.) ruht mit seiner Grundfläche auf einer horizontalen Ebene, und man soll bestimmen, wann er sich im Gleichgewichte befindet.

Die Wirkung der Schwere wird nicht geändert, wenn man sich die Masse des Körpers als in seinem Schwerpunkte G vereinigt denkt, und der Punkt G als mit der Basis AB z. B. durch die starren Linien GA und GB auf eine unveränderliche Weise verbunden angenommen wird. Wenn alsdann die Verticale Gg in die Basis AB (Fig. 77.) fällt, so hat der Schwerpunkt G kein Bestreben, sich in der Richtung BG um A oder in der Richtung AG um B zu drehen.

Wenn dagegen Gg außerhalb der Basis AB (Fig. 78.) fällt, so hat der Körper ein Bestreben, nach der Seite umzuschlagen, auf welche Gg fällt. Soll dieses geschehen, so muss sich der Punkt G

offenbar in der Richtung Gh um den Punkt B drehen, von welchem wir annehmen, dass er nicht auf der Ebene fortgleiten kann.

Wenn nun eine Verticallinie Gm das an G wirkende Gewicht des Körpers ausdrückt, so lässt sich diese Kraft in zwei andere zerlegen, nämlich in die Kraft Gn, welche nach der Richtung der Tangente an dem Kreisbogen Gh, den der Punkt G um B beschreiben will, wirkt, und in die Kraft mn, welche nach der Richtung GB wirkt und also auf der ersten senkrecht ist. Die Kraft Gn strebt den Körper um B zu drehen, und wird nicht aufgehoben; folglich will sich der Punkt G nach Gh bewegen und der Körper umschlagen.

Die Kraft mn wird durch den Widerstand in B aufgehoben, wenn B nicht fortgleiten kann; aber wenn die Basis AB und die Ebene, worauf sie ruht, als vollkommen glatt angenommen wird, so hat der Körper sowohl ein Bestreben zum Fortgleiten, als zum Umschlagen; und in der That, da alsdann keine Seitenkraft vorhanden ist, so will sich der Punkt G in der Verticale niederwärts bewegen, wenn der Körper auf einer horizontalen Ebene ruht, wie wir bei der Betrachtung der Bewegung eines solchen Körpers zeigen werden.

Wenn wir die Basis des Körpers als eine Fläche betrachten, so gilt noch dasselbe, d. h. der Körper bleibt im Gleichgewichte, wenn die durch den Schwerpunkt gehende Verticale in die Basis fällt, und er schlägt um, wenn diese Verticale außerhalb der Basis liegt.

Wenn der Körper auf mehrern Punkten oder auf mehrern Flächentheilen ruhet, so kann man sich um alle eine Schnur gelegt denken und die von dieser Schnur umschlossene Fläche ist alsdann als die Basis zu betrachten.

III. Gleichgewicht eines Körpers an einem Punkte und einer Fläche.

§. 73. Wenn ein Körper mit einem seiner Theile auf einem Punkte und mit einem andern auf einer Fläche ruhet, wie in Fig. 79., so sind die Reactionen des Punktes und der Fläche die Kräfte, welche seiner Gewichtskraft das Gleichgewicht halten. Wenn A der Stützpunkt ist, so wirkt die Reaction desselben nach Ag senkrecht auf die Oberfläche des Körpers und wenn PB die tragende Fläche und P der Berührungspunkt ist, so wirkt dieselbe nach der auf beiden Oberflächen senkrechten Richtung Pg, und nach §. 70. muss der Durchschnittspunkt g der Richtungen der beiden Kräfte in der Richtung liegen, nach welcher die dritte Kraft wirkt, d. h. in der durch den Schwerpunkt G des Körpers gehenden Verticale. Die Richtung Gg ist also vertical, und hieraus lässt sich nun die Lage des Gleichgewichtes leicht bestimmen.

Aufgabe 7. Ein Balken PQ (Fig. 80.), welcher als eine schwere Linie betrachtet wird, ruht auf einem Punkte A und stützt sich mit dem einen Ende gegen eine verticale Ebene BC; man soll seine Gleichgewichtslage bestimmen.

Es sei G der Schwerpunkt des Balkens, Pg horizontal und Ag senkrecht auf PA. Man ziehe Gg, so muss, da die Reaction der Ebene nach Pg und die des Punktes A nach gA erfolgt, der Durchschnittspunkt g dieser Richtungen in der durch den Schwerpunkt des Balkens gehenden Verticale liegen. Es ist also Gg vertical und senkrecht auf Pg. Man ziehe AE vertical, so sind die Dreiecke PAE, PgA, PGg einander ähnlich; folglich:

$$\frac{PE}{PA}=\frac{PA}{Pg}$$

$$\frac{PE}{PA}=\frac{Pg}{PG};\text{ folglich }\frac{PE^2}{PA^2}=\frac{PA}{PG};$$

also:

$$PA^3=PG.PE^2=PG.AD^2;\text{ und }PA=\sqrt[3]{(PG.AD^2)}.$$

Es ist also PA bekannt; denn PG und AD sind bekannt.

Zusatz 1. Zur Bestimmung der Neigung von PQ haben wir:

$$\cos PAD=\frac{AD}{PA}=\sqrt[3]{\frac{AD^3}{PG.AD^2}}=\sqrt[3]{\frac{AD}{PG}}.$$

Zusatz 2. Wenn also $AD>PG$ ist, so ist das Gleichgewicht unmöglich.

Aufgabe 8. Wenn alles wie in der vorhergehenden Aufgabe bleibt, nur dass jetzt die Ebene BC (Fig. 81.) unter irgend einem Winkel gegen den Horizont geneigt ist, die Gleichgewichtslage des Balkens zu finden.

Es sei, wie vorhin, G der Schwerpunkt des Balkens, Pg senkrecht auf BC und Ag senkrecht auf PA, also Gg vertical, und es sei auch AEF vertical und AD senkrecht auf BC; so geben die ähnlichen Dreiecke:

$$\frac{EP}{DF}=\frac{PE}{AD},\ \frac{PG}{Pg}=\frac{PA}{PE},\ \frac{Pg}{PA}=\frac{PA}{AD};$$

folglich:

$$\frac{FP.PG}{FD.PA}=\frac{PA^2}{AD^3};\text{ und }\frac{PA^3}{PF}=\frac{PG.AD^2}{FD}.$$

Es sei $PG=a$, $AD=b$, $FD=c$, $PA=x$, so ist:

$$PD=(x^2-b^2)^{\frac{1}{2}},\ PF=c-(x^2-b^2)^{\frac{1}{2}};$$

folglich $$\frac{x^3}{c-(x^2-b^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{ab^2}{c},$$

woraus x abgeleitet werden muss.

IV. Gleichgewicht an zwei Punkten.

§. 74. Wenn ein Körper mit seiner Oberfläche auf zwei festen Punkten ruht, so erfolgt die Reaction in jedem dieser Punkte nach einer auf seiner Oberfläche senkrechten Richtung, und diese Richtungen müssen sich, wie zuvor in der durch den Schwerpunkt des Körpers gehenden Verticale schneiden.

Aufgabe 9. *Eine ebene schwere Figur, wovon zwei zusammenstoßende Seiten geradlinig sind und einen rechten Winkel mit einander bilden, stützt sich in einer Verticalebene mit diesen beiden Seiten gegen zwei gegebene feste Punkte (Fig. 82.); man soll die Gleichgewichtslage derselben finden.*

Es seien A, B die beiden festen Punkte, CP, CQ die beiden geradlinigen Seiten der Figur und G ihr Schwerpunkt; GH sei senkrecht auf PC, und man ziehe AD, HL horizontal und BD, CFL, GKE vertical. Wenn Ag und Bg auf den Seiten CA, CB senkrecht sind, so liegen sie in den Richtungen der in den Punkten A und B auf die Seiten der Figur ausgeübten Druckkräfte, und diese Richtungen schneiden sich in der durch den Punkt G gehenden Verticale. Ferner ziehe man DM senkrecht auf BC, setze $Ad=a$, $BD=b$, $CH=h$, $HG=k$ und den Winkel CAD, also auch DBM, CHL, $HGK=\varphi$.

Da das Viereck AgBC ein Rechteck ist, so ist $Ag=CB$, und folglich offenbar:

$$AE=DF, \text{ also } EF=AD-2FD.$$

Ferner ist $$BC=CM-BM=a\sin\varphi-b\cos\varphi;$$

folglich: $$FD=BC\sin\varphi=a\sin^2\varphi-b\cos\varphi\sin\varphi$$

und: $$EF=AD-2FD=a-2a\sin^2\varphi+2b\sin\varphi\cos\varphi.$$

Aber: $$EF=KL=HL-HK=h\cos\varphi-k\sin\varphi,$$

also: $$a-2a\sin^2\varphi+2b\sin\varphi\cos\varphi=h\cos\varphi-k\sin\varphi,$$

oder: $$a\cos 2\varphi+b\sin 2\varphi=h\cos\varphi-k\sin\varphi,$$

woraus φ abzuleiten ist.

V. Gleichgewicht eines Körpers an zwei Oberflächen.

§. 75. Wenn ein Körper auf zwei Oberflächen ruhet, so findet die Rückwirkung an den Berührungspunkten nach Richtungen statt, welche auf diesen Oberflächen senkrecht sind; diese Richtungen müssen

einander schneiden, weil sich sonst der Körper nicht unterstützt fände, und der Durchschnittspunkt muss wie vorhin in der durch den Schwerpunkt des Körpers gehenden Verticale liegen.

Aufgabe 10. Ein gegebener Balken PQ (Fig. 83.), welcher als eine schwere Linie betrachtet wird, stützt sich gegen zwei gegebene geneigte Ebenen CP, CQ, und man soll die Lage seines Gleichgewichtes bestimmen.

Es seien Pg, Qg Perpendikel auf den beiden Ebenen, welche sich in g schneiden, und G der Schwerpunkt von PQ, so ist Gg vertical. Die Linie gG schneide die durch C gezogene Horizontale in H und die Ebene PC in K, so ist der Winkel PgK das Complement von PKg, so wie von KCH. Es ist also PgG = KCH = PCA und ebenso QgG = QCB.

Die Neigung PCA der Ebene PA sei $= \iota$ und $QCB = \iota'$, also $PgG = \iota$, $QgG = \iota'$. Ferner sei $PG = a$, $QG = a'$, und man verlängere QP bis zu dem Durchschneiden mit der Horizontalebene in D und setze $PDC = \delta$; so ist:

$$CPQ = PCD + CDP = \iota + \delta$$
$$CQP = QCB - QDC = \iota' - \delta.$$

Aber: $$\frac{PG}{Gg} = \frac{\sin PgG}{\sin GPg'} \quad \frac{Gg}{QG} = \frac{\sin GQg}{\sin QgG};$$

also: $$\frac{PG}{QG} = \frac{\sin PgG}{\sin QgG} \cdot \frac{\sin . GQg}{\sin GPg} = \frac{\sin PgG}{\sin . QgG} \cdot \frac{\cos . PQC}{\cos . QPC'}$$

oder: $$\frac{a}{a'} = \frac{\sin \iota}{\sin \iota'} \cdot \frac{\cos (\iota' - \delta)}{\cos (\iota + \delta)}$$
$$= \frac{\sin \iota}{\sin \iota'} \cdot \frac{\cos \iota' \cos \delta + \sin \iota' . \sin \delta}{\cos \iota \cos \delta - \sin \iota \sin \delta}$$
$$= \frac{\tang \iota}{\tang \iota'} \cdot \frac{1 + \tang \iota' . \tang \delta}{1 - \tang \iota . \tang \delta};$$

folglich:

$$a \tang \iota' - a \tang \iota \tang \iota' \tang \delta = a' . \tang \iota + a' \tang \iota' . \tang \iota . \tang \delta;$$

also: $$\tang \delta = \frac{a \tang \iota' - a' \tang \iota}{(a + a') \tang \iota . \tang \iota'} = \frac{a \cotang \iota - a' \cotang \iota'}{a + a'},$$

woraus sich die Neigung von PQ gegen den Horizont ergibt.

Zusatz 1. Wenn $a = a'$ ist, welches der Fall ist, wenn die schwere Linie PQ eine gleichförmige Dicke und Dichtigkeit hat, so ist:

$$\tang \delta = \frac{\tang \iota' - \tang \iota}{2 \tang \iota . \tang \iota'} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tang \iota} - \frac{1}{\tang \iota'} \right)$$
$$= \frac{\cotang \iota - \cotang \iota'}{2}.$$

Zusatz 2. Wenn $\iota' = \iota$ ist, oder die Ebenen gleiche Neigung gegen den Horizont haben, so ist:

$$\text{tang}\,\delta = \frac{a - a'}{a + a'}\,\text{cotang}\,\iota.$$

Zusatz 3. Soll die schwere Linie PQ in ihrer Lage des Gleichgewichtes horizontal sein, so muss $\delta = o$ sein; folglich:

$$a\,\text{tang}\,\iota' - a'\,\text{tang}\,\iota = o$$

und:

$$\frac{a}{a'} = \frac{\text{tang}\,\iota}{\text{tang}\,\iota'},$$

d. h. die Abschnitte GP und GQ müssen sich wie die Tangenten der Neigungen verhalten.

Aufgabe 11. Zwei Kugeln p, q (Fig. 84.) berühren einander und stützen sich gegen zwei geneigte Ebenen CP, CQ; man soll die Lage ihres Gleichgewichtes bestimmen.

Man verbinde ihre Mittelpunkte p, q durch eine gerade Linie. In jeder Lage ist die Entfernung der Mittelpunkte der Kugeln der Summe ihrer Halbmesser gleich, und sie haben folglich kein Bestreben, ihren Berührungspunkt zu verändern, und können als eine einzige Masse betrachtet werden. Auch ist die Reaction in den Berührungspunkten mit den Ebenen senkrecht auf diesen und die Richtung derselben geht resp. durch die Mittelpunkte p, q. Die Linie pq wird also auf dieselbe Weise unterstützt, als wenn sie in p und q auf den zu CP und CQ parallelen Ebenen cp, cq ruhte, und folglich kann ihre Lage nach der vorhergehenden Aufgabe gefunden werden.

Es seien r und r′ die Halbmesser der beiden Kugeln, p und q ihre Gewichte und δ die Neigung der Linie pq, so haben wir mit Beibehaltung der Bezeichnung in der vorigen Aufgabe, wenn G der Schwerpunkt der Masse beider Kugeln ist:

$$pq = r + r',\ pG = \frac{(r + r')\,q}{p + q} = a,\ qG = \frac{(r + r')\,p}{p + q} = a';$$

folglich:

$$\text{tang}\,\delta = \frac{a\,\text{tang}\,\iota' - a'\,\text{tang}\,\iota}{(a + a')\,\text{tang}\,\iota \,.\, \text{tang}\,\iota'}$$

$$= \frac{q \,.\, \text{tang}\,\iota - p\,\text{tang}\,\iota}{(p + q)\,\text{tang}\,\iota \,.\, \text{tang}\,\iota'}.$$

Zusatz. Hieraus erhellet, dass die Neigung der Linie pq unabhängig ist von den Halbmessern r, r′ und nur von den Gewichten der Kugeln abhängt. Die Wirkung ist genau dieselbe, der Körper mag durch die Reaction einer Oberfläche oder durch die Spannung einer auf dieser Oberfläche senkrechten Schnur getragen werden. Wenn ein Punkt

desselben an einer Schnur von einer gegebenen Länge hängt, so kann er sich nur auf einer Kugeloberfläche bewegen, und er befindet sich ganz in demselben Falle, als wenn er auf einer materiellen Kugeloberfläche ruhte.

Aufgabe 12. Wenn ein gegebener Balken PQ (Fig. 85.) mit zwei Seilen von gegebener Länge AP, BQ an zwei gegebenen festen Punkten A, B aufgehangen ist, die Lage seines Gleichgewichtes zu bestimmen.

Es sei g der Durchschnittspunkt der Richtungen AP, BQ, so ist folglich die Linie gG, welche g mit dem Schwerpunkte G verbindet, vertical; sie schneide die Richtung AB in E und PN, QN seien parallel zu gG und endlich sei D der Durchschnittspunkt von QP und BA. Ferner sei AB = c und ihre Neigung gegen die Verticale oder der Winkel AEG = ε, AP = p, BQ = q, GP = a, GQ = b, PAB = α, QBA = β und PDA = δ, so ist:

$$gPQ = APD = PAB - PDA = \alpha - \delta,$$

$$gQP = QPD + QDB = \beta + \delta,$$

$$AgB = PgQ = 180^0 - (\alpha + \beta);$$

also:
$$Ag = AB \cdot \frac{\sin ABg}{\sin AgB} = c \cdot \frac{\sin B}{\sin(\alpha+\beta)},$$

$$Bg = AB \cdot \frac{\sin BAg}{\sin AgB} = c \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

folglich:
$$Pg = Ag - AP = c \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha+\beta)} - p;$$

$$Qg = Bg - BQ = c \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha+\beta)} - q;$$

aber:
$$Pg = PQ \cdot \frac{\sin PQg}{\sin PgQ} = (a+b)\frac{\sin(\beta-\delta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$Qg = QP \cdot \frac{\sin QPg}{\sin QgP} = (a+b)\frac{\sin(\alpha-\delta)}{\sin(\alpha+\beta)};$$

folglich:
$$c \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha+\beta)} - p = (a+b) \cdot \frac{\sin(\beta+\delta)}{\sin(\alpha+\beta)},$$

$$c \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha+\beta)} - q = (a+b) \cdot \frac{\sin(\alpha-\delta)}{\sin(\alpha+\beta)},$$

oder:
$$c \sin \beta - p \sin(\alpha+\beta) = (a+b) \cdot \sin(\beta+\delta) \quad (1)$$

$$c \sin \alpha - q \cdot \sin(\alpha+\beta) = (a+b) \cdot \sin(\alpha-\delta) \quad (2)$$

Um nun α, β, δ bestimmen zu können, müssen wir noch eine dritte Gleichung haben, zu welchem Zwecke wir die Spannung der Seile PA, QB bestimmen müssen, und da diese Spannungen dem nach ver-

ticaler Richtung wirkenden Gewichte gleich ist, so müssen ihre horizontalen Seitenkräfte einander gegenseitig aufheben. Um nun die Spannung des Seiles PA zu finden, wollen wir den Punkt Q als einen festen Stützpunkt betrachten, woran der Balken PQ mittelst des Seiles PA im Gleichgewichte erhalten wird. Ziehen wir also Qx und Qy resp. senkrecht auf Gg und Ag, so haben wir:

$$\frac{\text{Spannung von PA}}{\text{Gewicht von PQ}} = \frac{Qx}{Qy},$$

oder wenn wir die Spannungen von PA, QB und das Gewicht von PQ resp. mit P, Q und W bezeichnen, so ist:

$$\frac{P}{W} = \frac{Qx}{Qy} = \frac{QG.\sin QGx}{QP.\sin QPy}$$
$$= \frac{QG.\sin(GDE+GED)}{QP.\sin(PAB-PDA)}$$
$$= \frac{b.\sin(\delta+\varepsilon)}{(a+b)\sin(\alpha-\delta)}.$$

Ebenso haben wir:

$$\frac{Q}{W} = \frac{a.\sin(\delta+\varepsilon)}{(a+b)\sin(\beta+\delta)};$$

folglich:

$$\frac{P}{Q} = \frac{b.\sin(\beta+\delta)}{a\sin(\alpha-\delta)}.$$

Aber die Kräfte, welche den Balken nach horizontaler Richtung ziehen, sind die nach dieser Richtung zerlegten Theile der Spannungen, d. h. resp. P sin APM und Q sin BQN, also P sin APM = BQN. Aber:

$$\sin APM = \sin(AMP+PAM) = \sin(\varepsilon+\alpha),$$
$$\sin BQN = \sin(ANQ-QBN) = \sin(\varepsilon-\beta);$$

folglich:

$$P = Q.\frac{\sin(\varepsilon-\beta)}{\sin(\varepsilon+\alpha)},$$

und:

$$\frac{b\sin(\beta+\delta)}{a\sin(\alpha-\delta)} = \frac{\sin(\varepsilon-\beta)}{\sin(\varepsilon+\alpha)}. \qquad (3)$$

Aus den drei Gleichungen (1), (2), (3) lassen sich also nun die drei unbekannten Größen α, β, δ ableiten.

Zusatz 1. Wenn der Schwerpunkt von PQ in der Mitte liegt, welches der Fall ist, wenn der Balken eine gleichförmige Dicke und Dichtigkeit hat, so ist a = b, folglich:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sin(\beta+\delta)}{\sin(\alpha-\delta)} = \frac{\sin BQP}{\sin APQ},$$

oder die Spannungen verhalten sich umgekehrt wie die Sinus der Winkel in P und Q.

Zusatz 2. Wenn A, B in derselben Horizontallinie liegen, so ist $\varepsilon = 90^0$ und die Gleichung (3) verwandelt sich in:

$$\frac{b \sin(\beta+\delta)}{a \cdot \sin(\alpha-\delta)} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}.$$

Aufgabe 13. Ein Balken BQ (Fig. 85.) wird von zwei Seilen getragen, welche über die Rollen A, B gehen, und woran in p und q die Gewichte P und Q hängen; man soll die Gleichgewichtslage desselben bestimmen.

Es sei $PAB = \alpha$, $QBA = \beta$ und die übrigen Bezeichnungen wie in der vorhergehenden Aufgabe. Die Spannungen der Seile Ap, Bq müssen den Gewichten P, Q gleich sein, und folglich ist nach den dort für die Spannungen gefundenen Ausdrücken:

$$\frac{P}{W} = \frac{b}{(a+b)} \cdot \frac{\sin(\delta+\varepsilon)}{\sin(\alpha-\delta)}$$

$$\frac{Q}{W} = \frac{a}{(a+b)} \cdot \frac{\sin(\delta+\varepsilon)}{\sin(\beta+\delta)},$$

und zugleich muss, wie früher, der Gleichung (3) der vorhergehenden Aufgabe:

$$\frac{b \sin(\beta+\delta)}{a \sin(\alpha-\delta)} = \frac{\sin(\varepsilon-\beta)}{\sin(\varepsilon+\alpha)}$$

Genüge geleistet werden, und die unbekannten Größen α, β, δ sind aus den drei letzten Gleichungen abzuleiten.

Wenn auf den Körper mehr als drei in derselben Ebene liegende Kräfte wirken, so kann man zwei derselben immer als an dem Durchschnittspunkte ihrer Richtungen angebracht sich vorstellen, und statt derselben ihre an diesem Punkte angebrachte Mittelkraft nehmen, wodurch die Anzahl der Kräfte um eine Einheit vermindert wird, und durch wiederholte Anwendung desselben Verfahrens lassen sich die Kräfte auf drei zurückführen, wodurch man wieder auf den vorhin betrachteten Fall kömmt.

VI. Stabiles und nicht stabiles (labiles) Gleichgewicht.

§. 76. Wenn ein Körper etwas aus seiner Lage des Gleichgewichtes entfernt wird, so hat er in einigen Fällen ein Bestreben, vermöge der auf ihn wirkenden Kräfte in diese Lage zurückzukehren, und in andern Fällen hat er ein Bestreben, sich immer weiter von dieser Lage des Gleichgewichtes zu entfernen, und eine neue Gleichgewichtslage anzunehmen, wenn er auch nur sehr wenig aus der ursprünglichen Gleichgewichtslage entfernt wurde. In diesem letzten Falle findet also

das Gleichgewicht nur so lange statt, als keine störende, wenn auch noch so geringe Kraft, auf den Körper wirkt. Aber wenn im ersten Falle auf den Körper eine geringe störende Kraft wirkt, so nimmt er nach einer schwingenden Bewegung um die Lage des Gleichgewichtes letztere bald wieder an und bleibt in Ruhe.

In dem ersten Falle wird daher das Gleichgewicht stabil und in dem letzten nichtstabil (labil) genannt, welche Unterscheidung aus den folgenden Beispielen noch deutlicher erhellen wird.

Aufgabe 14. Wenn ein Körper A (Fig. 86.), dessen untere Oberfläche die Kugelgestalt hat, auf einer andern Kugel ruht, zu bestimmen, in welchem Falle das Gleichgewicht stabil ist.

In der Gleichgewichtslage muss der Körper mit seiner sphärischen Oberfläche die untere Kugel in ihrem höchsten Punkte berühren, und sein Schwerpunkt muss in der durch den Berührungspunkt gehenden Verticale liegen. Es sei A dieser Berührungspunkt, G der Schwerpunkt des Körpers, C der Mittelpunkt der Kugel und D der der Kugeloberfläche des Körpers. Der Körper komme in irgend eine andere Lage, wo er die Kugel in P berührt, so dass die Punkte A, G in die Lage A', G' kommen und die Ebene $PA'G'$ vertical ist. Man ziehe die Verticale PR, welche $A'G'$ in R schneidet und da die ganze Masse des Körpers als in seinem Schwerpunkte concentrirt angenommen werden kann, so ist klar, dass der Körper, wenn G' zwischen R und A' fällt, ein Bestreben hat, in die Lage des Gleichgewichtes zurückzukehren, und dass, wenn G' jenseits R fällt, der Körper ein Bestreben hat, sich immer weiter von der Gleichgewichtslage zu entfernen Das Gleichgewicht ist also stabil, wenn $A'G$ oder $AG < A'R$ ist.

Offenbar ist der Bogen $PA' =$ Bogen PA, weil sich bei der Bewegung von einer Lage in die andere jeder Punkt von PA' mit jedem Punkte von PA in Berührung befunden hat. Es ist also:

$$\text{W.}PD'A' = \frac{\text{Bog.}\,A'P}{PD'} = \frac{AP}{AD} \text{ und W.}ACP = \frac{AP}{AC}.$$

Nun ist aber:

$$\frac{D'R}{RP} = \frac{\sin D'PR}{\sin PD'R} = \frac{\sin PCA}{\sin PD'A''}$$

und wenn die Winkel sehr klein werden, so verhalten sich die Sinus wie die Winkel und es ist folglich, wenn AP sehr klein ist:

$$D'R : RP = PCA : PD'A' = \frac{AP}{AC} : \frac{AP}{AD} = AD : AC$$

folglich: $$D'R + RP : RP = AC + AD : AC.$$

Aber wenn der Winkel ACP ohne Ende abnimmt, so wird $D'R + RP = D'P = DA$ und $RP = RA'$; folglich:

$$DA : RA' = AC + AD : AC; \text{ folglich } RA' = \frac{AD.AC}{AC + AD}$$

und das Gleichgewicht ist stabil, wenn $AG < RA'$ ist.

Wenn AC unendlich groß wird, so kommen wir auf den Fall zurück, wo ein Körper mit einer sphärischen Oberfläche auf einer horizontalen Ebene ruhet, und das Gleichgewicht ist stabil, wenn $AC < AD$ ist.

Wenn AD unendlich groß wird, so haben wir den Fall, wo ein Körper mit seiner ebenen untern Fläche auf einer Kugel ruht, und das Gleichgewicht ist stabil, wenn $AG < AC$ ist.

Wenn der Körper eine Halbkugel ist, so ist $AG = \frac{5}{8} AD$ (siehe Supplement) und folglich ist das Gleichgewicht stabil, wenn

$$\frac{5}{8} AD < \frac{AD.AC}{AD + AC}$$

$$5AD + 5AC < 8AC$$

$$AD < \frac{3}{5} AC \text{ ist.}$$

Wenn der Körper auf einer concaven Kugelfläche ruht, so ergibt sich auf dieselbe Weise, dass das Gleichgewicht stabil ist, wenn

$$AG < \frac{AD.AC}{AC - AD} \text{ ist.}$$

Wenn der untere Theil des Körpers und die Fläche, worauf er ruht, statt sphärisch, irgend eine andere krumme Fläche wäre, so sind die Bedingungen des Gleichgewichtes dieselben, als wenn beide Flächen Kugelflächen wären, deren Halbmesser resp. den Krümmungshalbmessern der Oberfläche des Körpers und der, worauf er ruht, für den Berührungspunkt gleich wären.

Aufgabe 15. Ein homogenes elliptisches Sphäroid ruht mit seinem schmälern Ende in einer concaven Halbkugel; man soll bestimmen, wie groß der Halbmesser derselben sein muss, damit das Gleichgewicht stabil ist.

Es sei c der Halbmesser der Halbkugel, und a, b resp. die halbe große und kleine Axe der Ellipse, durch deren Umdrehung das Sphäroid entsteht, so ist der Krümmungshalbmesser an dem Endpunkte der großen Axe $= \frac{b^2}{a}$ und dieser Werth muss für AD in die Formel gesetzt werden.

Ferner liegt der Schwerpunkt des Ellipsoides im Mittelpunkte der Ellipse, also ist $AG = a$, und das Gleichgewicht ist stabil, wenn

$$a < \frac{\frac{b^2}{a} \cdot c}{c - \frac{b^2}{a}}, \text{ oder } c < \frac{b^2 c}{ac - b^2}$$

$$\text{oder } a^2 c - a b^2 < b^2 c \text{ oder } c < \frac{a b^2}{a^2 - b^2} \text{ oder } c < \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Soll sich ferner das Sphäroid in der Halbkugel befinden können, so muss ihr Halbmesser größer sein als der Krümmungshalbmesser der Ellipse in dem Berührungspunkte, also $c > \frac{b^2}{a}$. Es sei $b = \frac{1}{2} a$, so ist $c > \frac{a}{4}$ und $< \frac{a}{3}$.

VII. Gleichgewicht der Dachstühle.

Wir wollen nun einige Aufgaben über den Druck, welchen Balken nach der Richtung ihrer Länge ausüben, die so mit einander verbunden sind, dass sie einander gegenseitig und außerdem noch andere Gewichte tragen, betrachten. Die Betrachtung der Stärke solcher Constructionen erfordert auch eine Untersuchung der Kraft, welche das Zerbrechen der Balken zu bewirken strebt und der Kraft, mit welcher verschiedene Materialien und bei verschiedenen Formen diesem Bestreben widerstehen können; allein dieser Theil des Gegenstandes gehört nicht zu unsern jetzigen Betrachtungen.

Aufgabe. Ein Dachstuhl ACA' (Fig. 87.) besteht aus Balken, die ein gleichschenkliges Dreieck bilden, dessen Basis horizontal ist; er trägt ein Gewicht in C; die Gewichte der Balken sind ebenfalls gegeben, und man soll die in A und A' wirkende horizontale Druckkraft bestimmen.

Es sei G der Schwerpunkt von AC, Gg vertical und Cg die Richtung der in C wirkenden Kraft, welche von dem Gewichte in C und dem Gewichte des Balkens $A'C$ herrührt; so muß Ag die Richtung der auf den Punkt A wirkenden Kraft sein; denn die Richtungen der drei auf den Balken AC wirkenden Kräfte müssen einander in demselben Punkte schneiden.

Ebenso, wenn G' der Schwerpunkt von $A'C$ und $G'g'$ vertical

ist, so sind Cg' und $A'g'$ die Richtungen der in C und A wirkenden Kräfte, und wenn die Balken $AC, A'C$ einander vollkommen gleich sind, so ist gg' horizontal, und wenn endlich die Linien $Ag, A'g'$ verlängert werden, so müssen sie sich in einem Punkte N der Verticale NC schneiden. Die Längen NC, Cg, gN, welche in den Richtungen der auf den Balken AC wirkenden Kräfte liegen, verhalten sich daher wie diese Kräfte und ebenso verhalten sich die Längen $NC, Cg', g'N$ wie die auf den Balken BC wirkenden Kräfte. Folglich wird das Gewicht C in C durch die zwei Reactionen $gC, g'C$ getragen. Die Linie gg' schneidet NC in M, und die zwei Kräfte $gC, g'C$ sind der verticalen Kraft $2MC$ gleich. Da ferner die in A wirkende Kraft durch gN ausgedrückt wird, so wird der horizontale Theil derselben durch gM ausgedrückt. Wenn also NC das Gewicht des Balkens AC ausdrückt, so drückt $2CM$ das in C wirkende Gewicht und Mg die in A oder A' nach horizontaler Richtung wirkende Kraft aus, welche den Balken AA' auszudehnen strebt.

Es sei G die Mitte von AC, also $Gg = \frac{1}{2}CN$. Wenn wir also CN in O halbiren, so ist $CO = Gg$ und gO parallel zu AC, und wenn B das Gewicht des Balkens AC, C das in C wirkende Gewicht und H den horizontalen Druck in A bezeichnet, so geben die ähnlichen Dreiecke nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{H}{B+C} = \frac{Mg}{CN+2CM} = \frac{Mg}{2CO+2CM} = \frac{AD}{2DC}.$$

Wenn daher α den Winkel bezeichnet, welchen AC mit dem Horizonte bildet, so ist:

$$\frac{H}{B+C} = \frac{1}{2\,\mathrm{tang}\,\alpha}; \text{ also } H = \frac{B+C}{2\,\mathrm{tang}\,\alpha}.$$

Wenn der Balken AA' den horizontalen Druck, welcher die Punkte A, A' auseinander zu treiben strebt, nicht aufhebt, so muss dieser horizontale Druck durch Hindernisse in A und A', gegen welche sich die untern Enden der Balken AC, BC stützen, aufgehoben werden.

Wenn der Dachstuhl ACA' eine Decke von gleichförmiger Dicke trägt, so bleibt die Formel auch noch gültig, wenn zu dem Gewichte B noch das Gewicht des Theiles der Decke gerechnet wird, welcher auf dem Balken $A'C$ ruht.

Das Gewicht C im Punkte C rührt von einem senkrecht auf der Ebene $A'C$ liegenden Längenbalken her.

§. 78. Aufgabe. Wenn irgend eine Anzahl gegebener Balken so mit einander verbunden sind, dass sie ein Vieleck bilden, einander in einer Verticalebene un-

terstützen und an den Ecken des Vieleckes auch noch gegebene Gewichte tragen, den horizontalen Druck auf die Stützpunkte zu finden.

Es sei AC (Fig. 88.) einer der Balken, G sein Schwerpunkt und Gg eine durch denselben gehendende Verticallinie, so schneiden sich die Richtungen der in A und C wirkenden Druckkräfte in einem gewissen Punkte g von Gg, und ihre Richtungen sind Ag, Cg. Man verlängere Ag, bis sie die durch C gehende Verticale in N schneidet und da der Balken AC von den drei nach den Richtungen NC, Cg, gN wirkenden Druckkräften getragen wird, so müssen sich diese Kräfte wie diese Linen verhalten.

Wenn also NC das Gewicht des Balkens ausdrückt, so drücken Ng und gC seine Reactionen in A und C aus. Ferner ist die Kraft Ng gleichgeltend mit den Kräften NM, Mg, und gC mit gM, MC. Es drückt also Mg den horizontalen Druck des Balkens in A und gM den gleichen horizontalen Druck in C aus, NM den niederwärts gerichteten verticalen Druck in A und MC den aufwärtsgerichteten verticalen Druck in C aus.

Es sei O die Mitte von CN und G die von AC, so ist $CO = Gg$; also gO parallel zu GC und OgM der Winkel, welchen AC mit dem Horizonte bildet. Bezeichnen wir diesen Winkel mit α, den horizontalen Druck in A oder C mit H und das Gewicht des Balkens mit B, so ist:

$$\frac{\text{niederwärtsger. Druck in A}}{H} = \frac{NM}{Mg} = \frac{MO}{Mg} + \frac{ON}{Mg};$$

$$= \operatorname{tang}\alpha + \frac{\frac{1}{2}B}{H};$$

also: niederwärtsger. Druck in $A = H \operatorname{tang}\alpha + \frac{1}{2}B$,

und ebenso:

$$\frac{\text{aufwärtsger. Druck in C}}{H} = \frac{MC}{Mg} = \frac{MO}{Mg} - \frac{OC}{Mg}$$

$$= \operatorname{tang}\alpha - \frac{\frac{1}{2}B}{H};$$

also: aufwärtsgericht. Druck in $C = H \operatorname{tang}\alpha - \frac{1}{2}B$

Ebenso ergibt sich, wenn wir das Gewicht des Balkens CD mit B und den Winkel, welchen er mit dem Horizonte bildet, mit α_1 bezeichnen:

niederwärtsger. Druck in $C = H \operatorname{tang}\alpha_1 + \frac{1}{2}B_1$,

aufwärtsger. Druck in $D = H \operatorname{tang}\alpha_1 - \frac{1}{2}B_1$,

und ebenso für die übrigen Ecken des Vieleckes.

Nun muss aber der aufwärtsgerichtete Druck in C dem niederwärtsgerichteten Drucke in C nebst dem Gewichte in C das Gleichgewicht halten, und bezeichnen wir dieses Gewicht mit C, so haben wir:

$$H\,\mathrm{tang}\,\alpha - \tfrac{1}{2}B = H\,\mathrm{tang}\,\alpha_1 + \tfrac{1}{2}B_1 + C,$$

oder:

$$H(\mathrm{tang}\,\alpha - \mathrm{tang}\,\alpha_1) = \tfrac{1}{2}(B + B^1) + C;$$

also:

$$H = \frac{\frac{1}{2}(B + B_1) + C}{\mathrm{tang}\,\alpha - \mathrm{tang}\,\alpha_1}.$$

Hieraus erhellet, dass der horizontale Druck an jeder Ecke derselbe ist.

Zusatz 1. Wenn wir die Gewichte der Balken $= o$ setzen, so ist

$$H = \frac{C}{\mathrm{tang}\,\alpha - \mathrm{tang}\,\alpha_1}.$$

Zusatz 2. Wenn wir annehmen, dass nur das Gewicht der Balken in Betracht kommt, so ist:

$$H = \frac{\frac{1}{2}(B + B_1)}{\mathrm{tang}\,\alpha - \mathrm{tang}\,\alpha_1}.$$

§. 79. Aufgabe. Die Lagen der Balken zu finden, wenn ihre Gewichte $B_1, B_2, B_3, \ldots$, die Gewichte $C_1, C_2, \ldots$ und die Lagen zweier dieser Balken gegeben sind.

Wenn $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ die Winkel bezeichnen, welche die Balken mit dem Horizonte bilden, so haben wir nach der vorigen Aufgabe die folgenden Gleichungen:

$$H(\mathrm{tang}\,\alpha_1 - \mathrm{tang}\,\alpha_2) = \tfrac{1}{2}(B_1 + B_2) + C_1,$$

$$H(\mathrm{tang}\,\alpha_2 - \mathrm{tang}\,\alpha_3) = \tfrac{1}{2}(B_2 + B_3) + C_2,$$

$$\text{etc.} = \text{etc.}$$

Wenn wir n Balken betrachten, so gibt es $n - 1$ Gewichte $C_1, C_2, \ldots$ und $n - 1$ Gleichungen. Die Anzahl der unbekannten Größen ist $= n + 1$, nämlich die n Tangenten $\mathrm{tang}\,\alpha_1, \mathrm{tang}\,\alpha_2, \ldots$ und der Druck H. Wenn wir also zwei der Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ kennen, so kann alles Uebrige gefunden werden.

Wenn das entferntere Ende (von A aus gerechnet) irgend eines der Balken tiefer liegt als das andere, so bildet er unterhalb der Horizontalen mit derselben einen Winkel und der zugehörige Werth von α ist negativ.

Zusatz 1. Wenn die Gewichte der Balken $= o$ sind, so haben wir:

$$H = \frac{C_1}{\mathrm{tang}\,\alpha_1 - \mathrm{tang}\,\alpha_2} = \frac{C_2}{\mathrm{tang}\,\alpha_2 - \mathrm{tang}\,\alpha_3} = \ldots,$$

und hieraus erhellet, daſſ ſich die Gewichte C_1, C_2, ... wie die Unterſchiede $\text{tang}\,\alpha_1 - \text{tang}\,\alpha_2$, $\text{tang}\,\alpha_2 - \text{tang}\,\alpha_3$, ... verhalten, was mit dem Verhältniſſe der Gewichte an dem Seilpolygone (§. 32.) übereinſtimmt, wie es der Fall ſein muſſ; denn wenn jede Seite des Seilpolygones als ſtarr betrachtet und das Polygon umgekehrt wird, ſo daſſ die Verticallinien vertical bleiben, und die Winkelſpitzen nach oben liegen; ſo iſt klar, daſſ die Kräfte nach entgegengeſetzten Richtungen wirken, und das Gleichgewicht noch fortbeſteht.

Zuſatz 2. Wenn wir alle Gewichte C_1, C_2, ... $= o$ ſetzen, ſo haben wir:

$$H = \frac{\frac{1}{2}(B_1 + B_2)}{\text{tang}\,\alpha_1 - \text{tang}\,\alpha_2} = \frac{\frac{1}{2}(B_2 + B_3)}{\text{tang}\,\alpha_2 - \text{tang}\,\alpha_3} = \text{etc.}$$

Es verhalten ſich alſo die Größen $\frac{1}{2}(B_1 + B_2)$, $\frac{1}{2}(B_2 + B_3)$, ... wie die Unterſchiede der Tangenten der Winkel, welche die Balken mit dem Horizonte bilden.

Zuſatz 3. Wenn die Lagen aller Balken unbekannt, ihre Längen reſp. gleich b_1, b_2, b_3, ... und die Lagen der äußerſten Punkte gegeben ſind, ſo haben wir außer den obigen $(n-1)$ Gleichungen noch die beiden folgenden:

$$b_1 \cos\alpha_1 + b_2 \cos\alpha_2 + b_3 \cos\alpha_3 + \text{etc.} = h$$
$$b_1 \sin\alpha_1 + b_2 \sin\alpha_2 + b_3 \sin\alpha_3 + \text{etc.} = k$$

zur Beſtimmung der $(n+1)$ unbekannten Größen, wo h und k die von A aus gezählten Coordinaten AH, HB von B ſind. Denn es iſt leicht einzuſehen, daſſ der b_2 entſprechende Theil von AH gleich $b_2 \cos\alpha_2$ iſt, u. ſ. w.

§. 80. Aufgabe. Von vier mit einander verbundene Balken von gleicher Länge und gleichem Gewichte ſtehen die beiden äußern mit ihren untern Enden auf derſelben Horizontallinie, ſo daß ſie mit derſelben ein unregelmäßiges Fünfeck bilden und einander das Gleichgewicht halten; man ſoll ihre Lage beſtimmen (Fig. 89.).

Es iſt einleuchtend, daſſ die Balken eine ſolche Lage haben müſſen, daſſ die beiden Hälften des Fünfecks ſymmetriſch ſind, und es ſeien α, α_1 die zwei Winkel, welche an der einen Seite reſp. der untere und obere Balken mit der Horizontallinie bilden, ſo iſt nach §. 78:

$$H(\text{tang}\,\alpha - \text{tang}\,\alpha_1) = B,$$

und da ſich an dem höchſten Punkte keine Laſt befindet, ſo iſt der aufwärtsgerichtete Druck auf dieſen Punkt folglich $= o$, alſo nach §. 78:

$$H\,\text{tang}\,\alpha_1 - \tfrac{1}{2}B = o, \text{ oder } H\,\text{tang}\,\alpha_1 = \tfrac{1}{2}B.$$

Dividirt man die erste Gleichung durch diese letzte, so erhält man:

$$\frac{\text{tang}\,\alpha}{\text{tang}\,\alpha_1} - 1 = 2, \text{ also } \text{tang}\,\alpha = 3\,\text{tang}\,\alpha_1.$$

Wenn die Endpunkte A, A′ und die Spitze B gegeben sind, so können wir die von den 4 Balken gebildete Figur durch folgende Construction finden:

Man fälle das Perpendikel OH, welches die Basis AA′ halbirt, halbire AH in E und errichte auf AH das Perpendikel EF, welches den durch die Punkte A, B, A′ gehenden Kreis in F schneidet und ziehe AF; so hat man die Lage des untern Balkens, und wenn man BG = AF nimmt, so schneidet BG die Linie AF in C und AC, CB sind die Lagen der beiden Balken auf der einen Seite von BH, und ihre Lage A′C′B auf der andern Seite von BH bildet eine ganz gleiche Figur wie ACB; denn wenn BC′ den Kreis in G schneidet, so ist:

$$AG' = A'B - BG' = AB - BG = AB - AF = BF,$$

also BG′ parallel zu AF und Winkel BCK = BC′K = FA′E;

folglich: $\text{tang}\,CAD = \frac{FE}{AE} = \frac{3\,FE}{A'E} = 3\,\text{tang}\,FA'E = 3\,\text{tang}\,BCK,$

und die oben gefundene Bedingung des Gleichgewichtes wird mithin erfüllt.

Zusatz. Wenn sich die Balken nicht in der Lage des Gleichgewichtes befinden, so findet ein horizontaler Druck statt, welcher durch einen in C und C′ befestigten horizontalen Balken CC′ aufgehoben werden kann. Wenn aber dieser horizontale Druck nicht aufgehoben wird, so bewegen sich die Balken, und zwar steigt die Spitze B nieder- oder aufwärts, je nachdem dieselbe zu niedrig oder zu hoch liegt. Die Lage ACBC′A′ ist eine Lage des nicht stabilen Gleichgewichtes.

VIII. Gleichgewicht der Gewölbe.

§. 81. Wir wollen eine Anzahl von Körpern $C_3, C_2, C_1, C, c, c_1, c_2, c_3$ (Fig. 90.) betrachten, welche die Form abgestumpfter Keile haben, und sich mit ihren Seitenflächen $PQ, P_1Q_1, \ldots$ gegenseitig berühren, und alle in derselben Verticalebene, wofür wir die des Papieres nehmen wollen, liegen. Diese Keile werden durch ihr Gewicht oder irgend eine andere Kraft niederwärts getrieben. Denn wenn ihre Seitenflächen als vollkommen glatt angenommen werden, so haben sie vermöge der Wirkung dieser Kräfte ein Bestreben, an einander hinzugleiten, und wenn ihre auf einander ausgeübten Wirkungen einander nicht das Gleichgewicht halten, so müssen die unter ihnen, welche ein größe-

res Bestreben zum Herabfallen haben, die übrigen aus ihren Lagen verrücken, weil keine gegenseitige Reibung zwischen ihnen angenommen wird. Allein es ist möglich, die Größen und Formen dieser Keile so einzurichten, dass sie genau einander das Gleichgewicht halten, und dass die Verbindung derselben in ihrer gegenwärtigen Lage vermöge der gegenseitigen Einwirkung der einzelnen Theile auf einander bestehen kann, und in diesem Falle wird diese Verbindung ein Gewölbbogen genannt. Die Keile $C, C_1, C_2, \ldots$ heißen Gewölbsteine und der unter ihnen, welcher den höchsten Punkt des Bogens bildet, heißt der Schlussstein, während die gegenseitigen Berührungsflächen $PQ, P_1Q_1, P_2Q_2, \ldots$ die Fugen genannt werden.

§. 82. Aufgabe. Man soll bestimmen, in welchem Verhältnisse die Gewichte der Gewölbsteine stehen müssen, damit sie in einem Gewölbbogen von selbst im Gleichgewichte sind.

In den meisten Fällen besteht eine Brücke aus einem Gewölbbogen mit einem darüber befindlichen Mauerwerk, dem Straßenpflaster und andern Massen, welche der Gewölbbogen tragen muss; allein wir wollen zunächst blos das Gleichgewicht des letztern allein betrachten.

Soll der Gewölbbogen im Gleichgewichte sein, so muss jeder Gewölbstein vermöge der auf ihn wirkenden Kräfte im Gleichgewichte erhalten werden. Nun sind aber diese auf jeden Gewölbstein wirkenden Kräfte außer seinem eigenen Gewichte nichts anders als die Druckkräfte, welche die beiden an jeder Seite mit ihm in Berührung befindlichen Gewölbsteine auf ihn ausüben, und zwar sind diese Druckkräfte nothwendig auf den einander berührenden Flächen senkrecht. Der Druck kann an jeder Fuge als auf der ganzen Berührungsfläche stattfindend angesehen werden; aber er ist einer einzelnen an einem gewissen Punkte der Berührungsfläche wirkenden Kraft gleich, und der Angriffspunkt dieser Kraft wird durch die Bedingung bestimmt, dass sich die Richtungen der an den beiden Flächen eines Gewölbsteines wirkenden Druckkräfte in der durch seinen Schwerpunkt gehenden Verticale schneiden müssen.

Wir wollen die Gewölbsteine $PQ_1, P_1Q_2, \ldots$ mit $C_1, C_2, \ldots$ benennen. Da der Gewölbstein C_2 unter der Wirkung seines Gewichtes und den Druckkräften auf seine beiden Flächen sich im Gleichgewichte befindet, so müssen diese Kräfte in demselben Verhältniss zu einander stehen, als wenn sie auf einen Punkt wirkten, und folglich müssen sie sich verhalten, wie die Seiten eines Dreieckes, die auf ihren Richtungen senkrecht sind (§. 28.). Es liege OT in der Richtung PQ oder sei parallel dazu und folglich senkrecht auf der Rich-

tung des auf PQ wirkenden Druckes; ferner sei OT_1 parallel zu P_1Q_1 und folglich senkrecht auf der Richtung des Druckes auf P_1Q_1 und endlich TT_1 horizontal, also senkrecht auf der Richtung der Schwere, so verhalten sich die Seiten des Dreieckes OTT_1 wie die drei Kräfte; folglich ist:

$$\frac{\text{Gewicht von } C_1}{\text{Druck auf } P_1Q_1} = \frac{TT_1}{OT_1}.$$

Desgleichen, wenn OT_2 zu P_2Q_2 parallel ist, und die Horizontale TT_1 in T_2 schneidet, so verhalten sich die Seiten des Dreieckes OT_1T_2 wie die auf C_2 wirkenden Kräfte. Also ist:

$$\frac{\text{Druck auf } P_1Q_1}{\text{Gewicht von } C_2} = \frac{OT_1}{T_1T_2}.$$

Aber da die an der Fuge P_1Q_1 auf C_1 und C_2 ausgeübten Druckkräfte von der Wirkung und Rückwirkung der Gewölbsteine herrühren, so sind sie einander gleich. Multipliciren wir also die beiden obigen Gleichungen in einander, so ergibt sich:

$$\frac{\text{Gewicht von } C_1}{\text{Gewicht von } C_2} = \frac{TT_1}{T_1T_2},$$

und ebenso ist für eine andere Fuge P_3Q_3, wenn OT_3 zu P_3Q_3 parallel ist:

$$\frac{\text{Gewicht von } C_1}{\text{Gewicht von } C_2} = \frac{TT_1}{T_1T_2}, \text{ und } \frac{\text{Gewicht von } C_2}{\text{Gewicht von } C_3} = \frac{T_1T_2}{T_2T_3}.$$

Hieraus folgt, dass sich die Gewichte der Gewölbsteine verhalten müssen wie die Stücken TT_1, T_1T_2, T_2T_3, ..., welche auf einer Horizontallinie zwischen den von irgend einem Punkte O parallel zu den Fugen gezogenen geraden Linien liegen.

Zusatz 1. Wenn wir eine Verticale OX ziehen, welche die Horizontale in X schneidet, und OX als Halbmesser des Kreises genommen wird, so sind XT, XT_1, XT_2, XT_3, ... für diesen Halbmesser die Tangenten der Winkel, welche die Fugen PQ, P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3, ... mit der Verticale bilden, und wir haben mithin folgenden Lehrsatz:

Bei einem im Gleichgewichte befindlichen Gewölbbogen verhalten sich die Gewichte der Gewölbsteine wie der Unterschied der Tangenten der Winkel, welche ihre Fugen mit der Verticale bilden.

Zusatz 2. Dieses stimmt mit dem in §. 78. Zus. 2. für ein System von Balken Bewiesenen überein; denn denkt man sich jeden

Balken in Figur 88. halbirt, und die Masse der beiden an der Ecke C zusammenstoßenden Hälften in C, die der beiden in D zusammenstoßenden Balkenhälften in D, u. s. f. vereinigt, und statt der Linie CD eine auf CD senkrechte Fuge; so erfolgt der auf diese Fuge wirkende Druck nach der Richtung CD, und folglich findet das Gleichgewicht statt, wenn wir das System der Balken als einen Gewölbbogen betrachten, worin an den Punkten C, D, ... die Gewichte $\frac{1}{2}(B_1 + B_2)$, $\frac{1}{2}(B_2 + B_3)$, ... wirken. Aber diese Gewichte verhalten sich wie die Unterschiede $\text{tang}\,\alpha_1 - \text{tang}\,\alpha_2, \text{tang}\,\alpha_2 - \text{tang}\,\alpha_3$, ... und die Winkel α_1, α_2, ... welche die Balken mit dem Horizonte bilden, sind jetzt die Winkel, welche die auf ihnen senkrechten Fugen mit der Verticale bilden, was also mit dem letzten Zusatze übereinstimmt.

Zusatz 3. Man zerlege den Druck an irgend einer Fuge $P_1 Q_1$ in zwei Kräfte, wovon die eine zu dem Horizonte parallel und die andere darauf senkrecht ist, so verhalten sich diese Kräfte, weil sie resp. auf OT_1, OX, XT_1 senkrecht sind, wie diese Linien. Folglich wird die horizontale Kraft durch OX ausgedrückt und ist an jeder Fuge dieselbe.

Wenn also H den horizontalen Druck auf die Fuge DE (Fig. 90.) ausdrückt, so ist der horizontale Druck an jeder andern Fuge auch $= H$.

Zusatz 4. Da sich die Druckkräfte auf die Fugen wie die Linien $OT, OT_1, \ldots$ verhalten, so ist einleuchtend, dass sie sich wie die Secanten der Winkel verhalten, welche die Fugen mit der Verticale bilden. Wenn also der Winkel, welchen irgend eine Fuge mit der Verticale bildet, $= \varphi$ gesetzt wird, so ist der Druck auf diese Fuge $= H \sec \varphi$.

Zusatz 5. Da sich die Gewichte der Gewölbsteine C, C_1, C_2, C_3, ... wie die Längen $XT, TT_1, T_1 T_2$, ... verhalten, so drückt die Linie XT_2 das ganze Gewicht der Masse zwischen DE und $P_2 Q_2$ aus, und ebenso für irgend eine beliebige andere Fuge als $P_2 Q_2$. Das Gewicht irgend eines von der Spitze anfangenden Theiles des Gewölbbogens verhält sich also wie die Tangente des Winkels, welchen die letzte Fuge des betrachteten Theiles mit der Verticale bildet. Wenn wir also diesen Winkel mit φ bezeichnen, so ist das Gewicht des entsprechenden Gewölbtheiles $= H \,\text{tang}\,\varphi$.

Zusatz 6. Wenn die Fuge horizontal ist, so muss das Gewicht des Gewölbbogens unendlich groß werden, wenn er sich unter den obigen Voraussetzungen genau im Gleichgewicht befinden soll.

Diese letzten Schlüsse werden aber dadurch, dass man die Reibung in Betracht zieht, bedeutend modificirt, wie wir später sehen werden.

§. 83. Der Pfeiler, oder das Widerlager ist die feste Masse, welche auf jeder Seite des Gewölbbogens den untersten Theil bildet, und worauf die untersten Gewölbsteine ruhen.

Aufgabe. Den horizontalen Druck zu finden, welchen ein Gewölbbogen auf die Pfeiler oder Widerlager ausübt.

Der auf die Fläche RS (Fig. 90.) ausgeübte Druck wirkt in allen Punkten derselben; aber er ist einer einzigen Kraft gleich, welche in einem gewissen Punkte der Fläche RS wirkt. Es sei A dieser Punkt und KA die Richtung, nach welcher die Kraft wirkt. Ebenso ist der Druck auf die verticale Fuge DE einer an einem gewissen Punkte B derselben wirkenden horizontalen Kraft gleich. Es sei HK die durch den Schwerpunkt des halben Gewölbbogens gehende Verticale, nach welcher das Gewicht desselben wirkt, so wird diesem nach KH wirkenden Gewichte durch die beiden nach AK und BK wirkenden Druckkräfte das Gleichgewicht gehalten, und wenn AH horizontal ist, so verhalten sich diese drei Kräfte wie HK, AK und HA, so dass, wenn KH das Gewicht A des halben Gewölbbogens ausdrückt, KA den auf A wirkenden Druck und folglich HA den nach horizontaler Richtung wirkenden Theil desselben ausdrückt. Folglich ist:

$$\text{Horizontaler Druck in } A = A \cdot \frac{HA}{KH}.$$

Dieses findet statt, es mag Reibung vorhanden sein, oder nicht, wenn der halbe Gewölbbogen durch eine in der Richtung AK wirkende Druckkraft getragen wird.

Wenn die Fuge RS vollkommen glatt ist, und mit der Verticale einen Winkel β bildet, so ist der Druck auf der Fläche RS senkrecht und

$$\text{der horizontale Druck} = A \cdot \frac{HA}{KH} = A \operatorname{tang} \beta.$$

§. 84. Aufgabe. Den Druck zu bestimmen, welche den Pfeiler oder das Widerlager eines Gewölbbogens umzustürzen sucht.

Wenn der Pfeiler AF durch den Druck des Gewölbbogens umgestoßen wird, so drehet er sich um den Punkt F seiner Basis und die Kraft, welche dieses zu bewirken strebt, ist der in A wirkende Druck. Wir wollen annehmen, dass dieser Druck in L nach der Richtung AL wirkt, und uns denselben in AN, NL zerlegt vorstellen, so ist der erste Theil das Gewicht A und der letzte nach NL wirkende hat kein Bestreben, den Pfeiler um F zu drehen. Folglich ist A die Kraft,

welche den Pfeiler umzuwerfen strebt und senkrecht auf den Hebelarm FL wirkt. Die Kraft, welche dieses zu verhindern strebt, ist das Gewicht des Pfeilers, welches wir uns in seinem Schwerpunkte G vereinigt und nach der Verticale GM wirkend vorstellen wollen. Es sei B dieses Gewicht des Pfeilers, so muss, wenn er nicht umgeworfen werden soll, $B.FM > A.FL$ sein. Ferner ist $FL = NL - NF$ und wenn wir die Horizontale AH ziehen, welche die Verticale KH in H schneidet, so haben wir:

$$NL = AN.\frac{AH}{KH}.$$

Wird dieser Werth für NL substituirt, so wird der Ausdruck für die Kraft unabhängig von dem Winkel, welchen RS mit dem Horizonte bildet, vorausgesetzt, dass kein Fortgleiten des Pfeilers stattfinden kann.

§. 85. Wenn wir statt der Annahme einer Vertheilung des Druckes auf die ganze Fläche jeder Fuge eine gleich große Kraft annehmen, welche an einem einzelnen Punkte dieser Fläche nach derselben Richtung wirkt, so wird das Vieleck, welches alle die Linien bilden, nach welchen diese Kräfte wirken, hier die Linie des Druckes genannt. Wenn z. B. BC, CC_1, C_1C_2 (Fig. 90.) resp. die Linien sind, in welchen der Druck auf die Fugen $DE_1, PQ_1, P_1Q_1, P_2Q_2$ wirkt, so ist BCC_1C_2 die Linie des Druckes, und wenn man irgend einen Punkt dieser Linie kennt, so lässt sich leicht die ganze Linie bestimmen.

Wenn z. B. C ein Punkt dieser Linie ist, so ziehe man das Perpendikel CC_1 auf die nächste Fuge PQ, welches die durch den Schwerpunkt des Gewölbsteines PQ_1 gehende Verticale in dem Punkte C_1 schneidet, von dem gefundenen Punkte C_1 fälle man das Perpendikel C_1C_2 auf die nächste Fuge P_1Q_1, welches die durch den Schwerpunkt des Gewölbsteines P_1Q_2 gehende Verticale in dem Punkte C_2 trifft, von welchem man wieder auf die nächste Fuge ein Perpendikel fällt, u. s. f.; so erhält man die Linie des Druckes. Denn die drei Kräfte, welche den Gewölbstein PQ_1 im Gleichgewichte erhalten, müssen sich in einem Punkte schneiden (§. 70.) und diese Kräfte sind die senkrecht auf die Fugen des Gewölbsteines wirkenden Druckkräfte und das Gewicht desselben, welches nach der Richtung Z_1C_1 wirkt, u. s. f.

§. 85. a. Die Linie des Druckes darf nicht außerhalb der Gewölbsteine fallen. Es sei CC_1 (Fig. 94.) ein Theil der Linie des Druckes, welcher die durch den Schwerpunkt G_1 des Gewölbsteines

PQ_1 gehende Verticale $Z_1 G_1$ in C_1 schneidet, und das Perpendikel $C_1 O_1$ auf $P_1 Q_1$ falle über Q_1, so fällt die Linie des Druckes $CC_1 C_2$ außerhalb der Gewölbsteine. Der auf die Fuge $P_1 Q_1$ wirkende Druck muss nach der Richtung $C_2 C_1$ wirken, damit er den Gewölbstein PQ_1 tragen kann. Aber keine auf die Punkte von $P_2 Q_2$ wirkenden Kräfte und alle übrigen Druckkräfte können eine Kraft geben, welche außerhalb $P_1 Q_1$ liegt, weil die Mittelkraft der an irgend zwei Punkten einer Linie wirkenden Kräfte zwischen diese beiden Punkte fällt, und es kann folglich in diesem Falle kein Gleichgewicht stattfinden. In einem solchen Falle trifft die auf die Fuge $P_1 Q_1$ wirkende aufwärtstreibende Kraft die Verticale $Z_1 G_1$ unterhalb des Punktes, wo sie von der Richtung des auf die Fuge PQ wirkenden Druckes getroffen wird, und der Gewölbstein $P_1 Q_1$ dreht sich so, dass das Ende P_1 nach innen gekehrt wird. Ebenso ist das Gleichgewicht unmöglich, wenn die Linie des Druckes unter P_1 fällt, und der Gewölbstein drehet sich so, dass das Ende P_1 nach außen zu liegen kommt. Jeder Gewölbstein und die auf ihn ruhende Last bringt eine Kraft hervor, welche nach einer durch denselben gehenden Verticale wirkt. Es seien ZC, $Z_1 C_1$, $Z_2 C_2$, ... (Fig. 90.) diese verticalen Richtungen, so müssen sich die drei auf jeden Gewölbstein wirkenden Kräfte in einem Punkte schneiden, wenn er sich im Gleichgewichte befinden soll (§. 70.), und es können folglich die Richtungen der auf jede Fuge wirkenden Druckkräfte auf folgende Weise bestimmt werden. Es sei B der Punkt in DE, an welchem der Druck wirkt; man ziehe die Horizontale BC, welche die erste Verticale in C schneidet, dann das Perpendikel CC_1 auf die Fuge PQ, welches die nächste Verticale in C_1 trifft, hierauf das Perpendikel $C_1 C_2$ auf $P_1 Q_1$, welches die folgende Verticale in C_2 trifft, u. s. f.; so ist $BCC_1 C_2 \ldots$ die Linie des Druckes, und an jeder Fuge $P_1 Q_1$ muss der Druck auf die verschiedenen Punkte so beschaffen sein, dass die daraus hervorgehende Mittelkraft in der Linie $C_1 C_2$ liegt; aber dies ist unmöglich, wenn die Linie $C_1 C_2$ nicht zwischen P_1 und Q_1 fällt, und folglich muss die Linie des Druckes irgendwo innerhalb der Gewölbsteine liegen. Dieses ist der Fall, wenn die Gewölbsteine schmal und ihre untern Flächen auf den Fugen senkrecht sind, und wenn die verticalen Kräfte durch den Schwerpunkt der Gewölbsteine gehen. Wenn die erste Bedingung des Gleichgewichtes der Gewölbbogen (§. 82.) nicht erfüllt wird, so haben die Gewölbsteine ein Bestreben, an einander hinzugleiten, und wenn die zweite Bedingung (in diesem §.) nicht erfüllt wird, so haben die Gewölbsteine ein Bestreben, sich um die innern oder äußern Kanten der Fugen zu drehen.

Bei den Beweisen der vorhergehenden Sätze haben wir angenommen, dass sich an dem höchsten Punkte D des Gewölbbogens eine Fuge befindet, was im Allgemeinen nicht der Fall ist; allein der Beweis bleibt derselbe, als wenn es der Fall wäre, weil die Linie des Druckes hier nothwendig auf der Verticallinie DE senkrecht sein muss.

§. 86. Aufgabe. Wenn auf dem Gewölbbogen keine andere Last ruht, die innere Krümmung (Intrados) DP (Fig. 91.) ein Kreis ist und die Fugen in der Richtung der Halbmesser liegen, die äußere Krümmung (Extrados) EQ des Gewölbbogens so zu bestimmen, dass er sich im Gleichgewichte befindet.

Es sei P irgend ein Punkt der innern Krümmung, O ihr Mittelpunkt, $POP' = \varphi$ ein kleiner Winkel und der ganze Gewölbbogen bestehe aus Gewölbsteinen wie $PQQ'P'$, deren Fugen den Winkel ψ mit einander bilden, und deren sich zwischen DO und PO, n befinden, so dass $DOP = n\psi = \omega$, und $DOP' = (n+1)\psi$ ist. Ferner sei $OD = OP = l$, $OQ = r$, $OE = k$, so ist, wenn aus dem Mittelpunkte O mit dem Halbmesser OQ ein Kreisbogen Qq beschrieben wird, die Fläche $PQqP' = \frac{1}{2}(r^2 - l^2)\psi$. Ferner ist, wenn wir $DOD' = \psi$ nehmen und mit dem Halbmesser OE den Bogen Ee beschreiben, die Fläche $DEeD' = \frac{1}{2}(k^2 - l^2)\psi$, und nach §. 82. haben wir, wenn $PQqP'$, $DEeD'$ als Gewölbsteine betrachtet werden:

$$\frac{\frac{1}{2}(r^2 - l^2)\psi}{\frac{1}{2}(k^2 - l^2)\psi} = \frac{\operatorname{tang}(n+1)\psi - \operatorname{tang} n\psi}{\operatorname{tang}\psi}$$

folglich:

$$\frac{r^2 - l^2}{k^2 - l^2} = \frac{\sin\psi}{\operatorname{tang}\psi \cos(n+1)\psi \cdot \cos n\psi} = \frac{\cos\psi}{\cos(n+1)\psi \cos n\psi}.$$

Lassen wir nun den Winkel ψ ohne Ende abnehmen, so nähern sich $DEeD'$, $PQqQ'$ resp. auch ohne Ende den Theilen $DEE'D'$, $PQQ'P'$ der zwischen den beiden Curven liegenden Fläche. Aber in diesem Falle nähern sich $n\psi$ und $(n+1)\psi$ auch ohne Ende der Gleichheit und zwar dem gemeinschaftlichen Werthe $DOP = \omega$, und $\cos\psi$ nähert sich der Einheit. Wir haben also:

$$\frac{r^2 - l^2}{k^2 - l^2} = \frac{1}{\cos^2\omega};$$

folglich:

$$r^2 = l^2 + (k^2 - l^2)\sec^2\omega.$$

Zusatz 1. Wir haben also folgende Construction: Man ziehe OR horizontal, nehme $RF = OE$ und ziehe FG horizontal; durch den Durchschnittspunkt S von OP und FG ziehe man die Verticale ST und nehme $OQ = ET$; so ist der geometrische Ort des Punktes

Q die äußere Krümmung des Gewölbbogens; denn es ist $OF^2 = RF^2 - RO^2 = k^2 - l^2$; folglich $FS^2 = (k^2 - l^2) \tang^2 \omega$ und $ET^2 = EO^2 + OT^2 = EO^2 + FS^2 = k^2 + (k^2 - l^2) \tang^2 \omega = l^2 + (k^2 + l^2) \sec^2 \omega = r^2$.

Zusatz 2. ET ist immer größer als FT oder OS; folglich liegt P immer über FG und die äußere Krümmung des Gewölbbogens hat die gerade Linie FG zur Asymptote.

§. 87. Aufgabe. Die Bedingungen des Gleichgewichtes eines Gewölbbogens zu finden, welcher seitwärts von verticalen und unter und oberhalb von horizontalen Ebenen begrenzt wird (Fig. 92.).

Die Gewichte der Gewölbsteine müssen sich wie die Unterschiede der Tangenten der Winkel verhalten, welche die Fugen mit der Verticale bilden, und das Gewicht eines jeden Gewölbsteines, z. B. PQQ_1P_1, ist der Fläche PQQ_1P_1 proportional. Wenn nun ODE vertical ist, so ist die Fläche:

$$PQQ_1P_1 = \tfrac{1}{2} DE (PP_1 + QQ_1) \text{ und } QQ_1 = PP_1 \cdot \frac{OQ}{OP};$$

folglich:
$$PQQ_1P_1 = \tfrac{1}{2} DE . PP_1 \left(1 + \frac{OQ}{OP}\right)$$

Ferner verhält sich der Unterschied der Tangenten wie:

$$\frac{P_1D}{DO} - \frac{PD}{DO} = \frac{PP_1}{DO};$$

also:
$$\frac{PP_1}{DO} = \tfrac{1}{2} DE . PP_1 \left(1 + \frac{OQ}{OP}\right),$$

und da DE für alle Gewölbsteine gleich ist, so ist:

$$\frac{1}{DO} = 1 + \frac{OQ}{OP} = 1 + \frac{OE}{OD} = 1 + \frac{OD + DE}{OD},$$

folglich:
$$= 2 + \frac{DE}{OD},$$

oder:
$$1 = 2OD + DE,$$

und da DE constant ist, so ist auch OD constant. Hieraus sieht man, dass der Punkt O immer derselbe ist, und alle Fugen durch denselben Punkt gehen müssen. Es ist auch, wie vorhin, erforderlich, dass die Linie des Druckes DCC_1C_2A die Fugen innerhalb der Gewölbsteine trifft.

§. 87. a. Wenn auf dem Gewölbbogen noch eine andere Masse ruht, so sind dieselben Schlüsse noch anwendbar, wofern man für das

Gewicht der Gewölbsteine die auf dieselben wirkenden Kräfte substituirt, welche von ihren eigenen Gewichten und den über ihnen befindlichen Massen herrühren.

In diesem Falle muß der Gewölbbogen für ein gegebenes System der auf seine verschiedenen Theile wirkenden Kräfte eine gewisse Form haben, wenn er sich im Gleichgewichte befinden soll, und diese Form wird zuweilen der äquilibrirte Gewölbbogen genannt. Diese Form kann, wie wir in der analytischen Statik sehen werden, unter gegebenen Bedingungen durch Anwendung der Differenzialrechnung gefunden werden.

§. 87. b. Lehrsatz. Wenn die Gewölbsteine kurz sind, so fällt die Linie des Druckes fast mit der innern Krümmung des Gewölbbogens zusammen.

Denn die Richtungen, nach welchen die Kräfte auf jeden Gewölbstein wirken, gehen durch die resp. Gewölbsteine; folglich muß die Linie des Druckes, welche alle diese Richtungen schneidet, und nicht aus den Gewölbsteinen heraustritt, über der innern Krümmung liegen, und da die Gewölbsteine kurz sind, so muss sie fast mit ihr zusammenfallen. Dieses findet statt, wenn die Gewölbsteine nicht an einander hingleiten können und sie haben die gehörige Form, wenn der Gewölbbogen allein der Theil ist, welcher dem Drucke widerstehen kann, indem zwischen den übrigen Theilen weiter kein Zusammenhang stattfindet. Unter dieser Voraussetzung wird der belastete Theil des Gewölbbogens, wie z. B. BP (Fig. 95.), durch die an den Fugen B und P wirkenden Druckkräfte getragen. Wenn also BC, PC die Richtungen sind, nach welchen dieser Druck wirkt, so müssen sie sich in einem Punkte C der Linie ZG schneiden, nach welcher der Druck der ganzen auf dem Gewölbbogen ruhenden Masse DQRP wirkt. Wenn der Druck jedes Theiles der auf dem Gewölbbogen ruhenden Masse nach der verticalen Richtung wirkt, so muss die Linie ZG, nach welcher der Druck der ganzen Masse wirkt, durch den Schwerpunkt der Masse BERP gehen, und wenn diese Masse aus Quader- oder Barnsteinen besteht, so kann man diese Voraussetzung ohne beträchtlichen Fehler machen.

§. 87. c. Lehrsatz. Wenn der Druck auf den höchsten Theil eines äquilibrirten Gewölbbogens zunimmt, so kann er das Zerreißen der Theile des Gewölbbogens auf beiden Seiten der Spitze bewirken.

Es sei BP (Fig. 95.) die Curve, welche ein äquilibrirter Gewölbbogen bildet, so schneiden sich die Tangenten BC, PC derselben

in einem Punkte C der Linie ZG, nach welcher der Druck der ganzen auf dem Theile BP ruhenden Masse wirkt. Dieser Druck ist die Mittelkraft aus den Druckkräften aller Theile der obern Masse BERP, und wenn der Druck auf den höchsten Punkt B des Gewölbbogens zunimmt, so rückt diese Mittelkraft näher nach B und wirkt z. B statt nach ZC nach der Linie Z′C′. Aber wenn wir in diesem Falle das Perpendikel C′P′ auf die Fuge P ziehen, so muss die in P wirkende Druckkraft nach der Richtung P′C′ wirken, um die obere Masse tragen zu können, d. h. die Linie des Druckes muss durch P′ gehen.

Wenn also der Punkt P′ außerhalb der Fläche des Gewölbbogens fällt, so hat die Fuge in P ein Bestreben, sich zu öffnen, indem das Ende P nach außen geht.

Zusatz. Desgleichen, wenn der Druck auf den höchsten Punkt des Gewölbbogens abnimmt, oder der auf die zu beiden Seiten neben ihm liegenden Theile größer wird, so kann die Linie des Druckes außerhalb des Gewölbbogens fallen, und die Fuge P hat alsdann wieder ein Bestreben, sich zu öffnen, indem das Ende P nach innen geht.

§. 87. d. Lehrsatz. Wenn zwischen den Theilen der auf dem Gewölbbogen ruhenden Masse Cohäsion stattfindet, so kann derselbe, obgleich die Linie des Druckes außerhalb der Gewölbsteine fällt, doch im Gleichgewichte bleiben.

Wir wollen annehmen, daß die Linie des Druckes die Fuge QP (Fig. 95.) in P′ trifft, so ist zum Gleichgewichte eine an dieser Fuge nach der Richtung P′C′ wirkende Druckkraft erforderlich, welche jedoch nicht durch den Widerstand des Gewölbbogens in P hervorgebracht werden kann. Allein es sei R der erforderliche nach der Richtung P′C′ wirkende Widerstand, und es wirke auch in dem Punkte Q eine Cohäsionskraft C, welche mit R nach entgegengesetzter Richtung wirkt, und so beschaffen ist, daß $C \times QP = R \times P'P$; so wird die nach der Richtung P′C′ wirkende Druckkraft ersetzt, und das Gleichgewicht findet statt.

Hieraus sieht man, dass, wenn die Gewölbsteine sehr kurz sind, der Gewölbbogen die Form eines äquilibrirten haben muss, um keine Cohäsionskräfte nöthig zu haben; aber das Hingleiten der Gewölbsteine an einander wird als unmöglich betrachtet. Der Gewölbbogen kann als biegsam betrachtet werden, so dass zur Erhaltung seiner Form das Gleichgewicht der auf ihn wirkenden Druckkräfte erfordert wird. Dieses ist der Fall, wenn zwischen den Theilen der auf dem Gewölbbogen ruhenden Masse keine Cohäsion stattfindet; aber wenn diese Cohäsion

stattfindet, so kann der Gewölbbogen sehr wohl im Gleichgewicht bleiben, obgleich er nicht die Form eines äquilibrirten hat.

Bisher haben wir vorausgesetzt, dass zwischen den Theilen des Gewölbbogens keine Reibung stattfindet; aber wenn diese Reibung in Betracht gezogen wird, so ist es nicht mehr nothwendig, dass die Fugen auf der Linie des Druckes senkrecht sind, wie wir in dem folgenden Kapitel sehen werden. Die Reibung wirkt also wie eine Cohäsionskraft und diese strebt nach dem letzten §. die Construction zu erhalten.

§. 87. e. Lehrsatz. Das Gleichgewicht eines Gewölbbogens ist innerhalb gewisser Grenzen stabil.

Wenn die Gewölbsteine eine verschwindende Länge haben, und die Masse ohne allen Zusammenhang ist, so ist das Gleichgewicht des Gewölbbogens nicht stabil, und die geringste Zu- oder Abnahme des Gewichtes in irgend einem Theile des Bogens kann ihn zerstören, indem die Linie des Druckes an eine Stelle gebracht wird, wo der Druck nicht durch die Structur ersetzt werden kann. Aber die Gewölbsteine haben immer einige Länge, so dass kleine Druckveränderungen stattfinden können, und auch die Linie des Druckes etwas verändert werden kann, jedoch nicht so viel, dass sie außerhalb der Gewölbsteine fällt.

Auch wenn die Linie des Druckes außerhalb der Gewölbsteine fällt, so kann die Cohäsion der Masse über dem Gewölbbogen so beschaffen sein, dass sie in Verbindung mit dem Drucke der Gewölbsteine eine Druckkraft hervorbringt, welche nach der Richtung der Linie des Druckes wirkt, und das Gleichgewicht des Gewölbbogens erhält. Es ist einleuchtend, dass das Gleichgewicht eines Gewölbbogens durch den Druck an den Fugen und durch die Cohäsion zwischen den übrigen Theilen der Masse erhalten wird. Wenn diese Kräfte etwas verändert werden, so nimmt die Linie des Druckes verschiedene Lagen an, und die Hauptrichtung des Druckes an jeder Fuge rückt näher nach der innern oder äußern Seite des Gewölbbogens.

Aber wenn die Cohäsionskräfte der verschiedenen Punkte der Masse oder die Druckkräfte der verschiedenen Punkte der Gewölbsteine, welche zum Gleichgewichte erforderlich sind, größer sind als die Natur des Baumaterials gestattet, so wird der Gewölbbogen zerstört.

§. 87. f. Der Professor Robison hat diese Ansicht des Gegenstandes auf folgende Weise erläutert: Wenn ein Gewölbbogen an dem höchsten Punkte dem Drucke einer großen Last ausgesetzt wird, so zertheilt er sich von selbst in eine Anzahl von Theilen, wovon jeder so viel Gewölbsteine enthält, als von einer geraden Linie getroffen werden können, und er kann alsdann als in derselben Lage befindlich betrach-

tet werden, wie ein vieleckiger Bogen von langen Steinen oder Balken, welche sich gegen einander stützen. Es werde z. B. der Gewölbbogen A B A′ (Fig. 93.) durch die geraden Linien A C, C B, ..., welche so gezogen sind, dass sie zwischen der untern und obern Krümmung liegen, in 4 Theile A C, C B, B C′, C′ A′ getheilt, so kann derselbe wie ein Dachstuhl A C B C′ A′ (Fig. 89.) betrachtet werden. Wenn derselbe in B von oben nach unten gedrückt wird, so strebt er an den Ecken A, C, B, C′, A′ zu zerreißen, und wenn der Widerstand an diesen Ecken nicht groß genug ist, so stürzt der Dachstuhl ein, indem der Theil B niederwärts sinkt, und die Theile C, C′ sich auswärts öffnen. Diese Ansicht des Gegenstandes wurde durch die Beobachtung bestätigt, dass ein Gewölbbogen, dessen Steine zu kurz waren, auf diese Weise einstürzte, indem er an mehrern Stellen zerriss, nämlich in der Mitte B und an einem andern Punkte C zwischen B und dem Anfange A. Auch lösten sich ungefähr 14 Tage vor dem Einsturze Stücke an den Fugen der Gewölbsteine ab, an zwei Punkten E und F zwischen A und B und zwischen B und C. Dieses lässt sich dadurch erklären, dass die Linien des Druckes B C, C A näher bei dem untern Ende der Gewölbsteine in C und F durchgingen, so dass fast aller Druck auf die innern Kanten fiel. Indem Prof. Robison Versuche mit Modellen anstellte, fand er, dass der überlastete Gewölbbogen immer an einer Stelle C einstürzte, welche weit unter dem Punkte F lag, wo die erste Spaltung beobachtet wurde.

Sechstes Kapitel.

Von der Reibung in der Statik.

§. 88. Wenn ein Körper längs einer materiellen Oberfläche fortzugleiten oder sich so zu bewegen strebt, dass er sich an dieser Oberfläche reibt, so zeigt sich ein Widerstand, welcher die Reibung genannt wird. Dieser Widerstand kann auf dieselbe Weise, wie andere Kräfte, gemessen und betrachtet werden; aber bei den im Vorhergehenden behandelten Aufgaben des Gleichgewichtes wurde seine Wirkung nicht in Betracht gezogen, was jetzt für einige Fälle des Gleichgewichtes geschehen soll.

Verschiedene materielle Oberflächen üben auch eine verschiedene Reibung auf einander aus, und wenn angenommen wird, dass keine Reibung an ihnen stattfindet, so werden sie vollkommen glatt oder polirt genannt.

Lehrsatz. Wenn ein Körper auf eine vollkommen polirte Oberfläche einen Druck ausübt, so wirkt dieser

Druck nach einer auf der Oberfläche senkrechten Richtung.

Eine Oberfläche heißt nach dem eben Gesagten polirt oder vollkommen glatt, wenn sie auf den Körper, welcher sich an ihr fortzubewegen strebt, keinen Widerstand ausübt, welcher der Bewegung hinderlich ist. Die Richtung des Widerstandes, welchen die Ebene wirklich ausübt, muss gegen alle Richtungen, nach welchen sich der Körper auf der Oberfläche bewegen kann, eine gleiche Lage haben, d. h. sie muss gegen diese Richtungen überall gleich geneigt oder auf der Oberfläche senkrecht sein.

§. **89.** Wenn die Oberfläche nicht vollkommen polirt ist, so übt sie außer dem auf ihr senkrechten Widerstande noch einen andern längs ihr oder nach der Tangente an ihr wirkenden Widerstand aus, und zwar in einer der Richtung, nach welcher sich der Körper längs der Oberfläche zu bewegen strebt, gerade entgegengesetzten Richtung. Dieser Widerstand ist die Reibung, und wenn er zur Hervorbringung des Gleichgewichtes angewandt wird, so wird er gleich jeder andern statischen Kraft als eine Druckkraft betrachtet, und seine Wirkung in Beziehung auf das Gleichgewicht wird auf dieselbe Weise gemessen, wie die der übrigen Kräfte in den Kapiteln über das Gleichgewicht gemessen wurden. Hiernach wird die Reibung eines sich auf einer Ebene fortbewegenden Körpers durch die Kraft gemessen, welche den Körper eben auf ihr zu bewegen im Stande ist, indem diese Kraft nach der Richtung wirkt, nach welcher sich der Körper bewegen muss, wenn er sich bewegt.

Es sei z. B. W (Fig. **162.**) ein schwerer Körper, welcher auf der horizontalen Ebene AB ruhet, und von einer Kraft P nach horizontaler Richtung längs derselben fortgezogen wird. Wenn die horizontale Ebene nicht vollkommen glatt ist, so kann die Kraft P so klein sein, dass ihr Druck die Reibung nicht überwindet und der Körper W ungeachtet der Wirkung der Kraft P in Ruhe bleibt. Wenn die Kraft P allmählig größer wird, so fängt der Körper W zuletzt an, sich zu bewegen, indem die Reibung überwunden wird, und P ist alsdann eine solche Kraft, dass irgend eine kleinere Kraft den Körper W nicht in Bewegung setzen würde, aber eine größere ihn sofort in Bewegung setzt. Dieser Werth der Kraft P misst alsdann die Größe der Reibung des Körpers W auf der horizontalen Ebene AB.

§. **90.** Die Reibung hängt in diesem Falle ab von der Materie, woraus die Ebene AB und der Körper W bestehen, von dem Grade der Rauheit beider und von dem Gewichte des Körpers W; aber sie ist unabhängig von der Form des Körpers W oder von der Größe oder

Form der Fläche MN, mit welcher der Körper die Ebene berührt. Diese Gesetze der Reibung werden durch die Erfahrung bestätigt.

§. 91. Die Reibung wird durch Veränderung der Berührungsfläche nicht geändert, so lange der Druck derselbe bleibt.

Wenn ein rechtwinkliges Parallelepipedum LMN (Fig. 162.) zuerst mit seiner größern Seitenfläche MN und dann mit seiner kleinern Seitenfläche LM auf die Horizontalebene AB gelegt wird, so ist die nach horizontaler Richtung wirkende Kraft P, welche den Körper eben in Bewegung zu setzen vermag, in beiden Fällen dieselbe, und es ist klar, dass auch der Druck derselbe ist, nämlich das Gewicht des Körpers, während die Berührungsflächen verschieden sind.

§. 92. In dem Folgenden wollen wir die Reibung als dem Drucke proportional annehmen. Dieses ist jedoch nicht in aller Strenge wahr; denn die einem größern Drucke entsprechende Reibung ist geringer, als sie nach diesem Gesetze sein müsste. Wenn also R den Druck bezeichnet, welchen der Körper auf die Oberfläche ausübt, so kann fR, wo f ein sich mit der Beschaffenheit der Substanzen etc. ändernder Bruch ist, die Reibung ausdrücken.

I. Reibung zwischen endlichen, mit einander in Berührung stehenden Oberflächen.

§. 93. Es sei W (Fig. 162. u. 163.) ein mit der ebenen Fläche MN mit der Ebene AB in Berührung gebrachter Körper. Wenn R den Druck auf die Ebene AB und fR die Reibung ausdrückt, und wenn die Flächen AB, MN als durch die gewöhnlichen Verfahrungsarten polirt vorausgesetzt werden, so hat der Factor f folgende Werthe:

Wenn die Oberflächen aus Holz bestehen und die Fasern nach derselben Richtung liegen, so ist $f=\frac{1}{2}$. Wenn die Fasern einander durchkreuzen, so ist $f=\frac{1}{4}$; wenn die eine Oberfläche aus Holz und die andere aus Metall besteht, so ist $f=\frac{1}{5}$, und wenn beide Oberflächen metallisch sind, so ist $f=\frac{1}{4}$.

Die Reibung wird vermindert, wenn die sich an einander reibenden Oberflächen mit Fett oder Oel überzogen sind, und wenn Unschlitt angewandt wird, so nimmt man die Reibung als um die Hälfte vermindert an.

§. 94. Aufgabe. Die Größe der Reibung durch Versuche zu bestimmen.

Es sei AB (Fig. 163.) eine geneigte Ebene, deren Neigungswinkel beliebig verändert werden kann, W der auf ihr ruhende Kör-

per und die Ebene werde allmählig von ihrer horizontalen Lage CB durch Heben des Endes A successive in solche Lagen gebracht, dass sie immer größere Neigungswinkel mit dem Horizonte bildet, bis der Körper W von ihr herunter zu gleiten anfängt. Diese letzte Neigung der Ebene, bei welcher der Körper noch nicht anfängt, herabzugleiten, werde gemessen und sei die in der Figur angegebene; so hält die nothwendig längs der geneigten Ebene wirkende Reibung den Körper auf derselben eben im Gleichgewichte. Wenn wir also CD senkrecht auf AB ziehen, so wird der Körper W durch drei Kräfte im Gleichgewichte erhalten, nämlich durch sein Gewicht, den Widerstand der Ebene und die Reibung, welche resp. auf CB, BD und DC senkrecht sind. Diese Kräfte verhalten sich also wie diese Linien, und es verhält sich, wie in §. 38:

$$\text{Reibung} : \text{Druck} = CD : DB.$$

Zusatz 1. Wenn wir CA vertical ziehen, so verhält sich auch:

$$\text{Reibung} : \text{Druck} = AC : CB.$$

Zusatz 2. Wenden wir die frühere Beziehung an, so verhält sich folglich:

$$fR : R = AC : CB, \text{ also ist } f = \frac{AC}{BC}.$$

Zusatz 3. Wenn wir den Neigungswinkel ABC, bei welchem der Körper anfängt, von der schiefen Ebene herabzugleiten, mit β bezeichnen, so ist:

$$f = \text{tang}\,\beta.$$

Zusatz 4. Wenn die Reibung dem Drucke proportional ist, so ist der Winkel β, bei welchem das Herabgleiten beginnt, für alle Gewichte der Körper von einerlei Art derselbe.

Zusatz 5. Um uns also auf experimentalem Wege zu überzeugen, ob die Reibung dem Drucke proportional ist, brauchen wir nur zu beobachten, ob dieser Neigungswinkel derselbe bleibt, wenn das Gewicht verändert wird.

Da aber die Reibung für starke Druckkräfte geringer ist, als sie nach diesem Proportionalitätsgesetze sein müsste, so ist der Neigungswinkel, bei welchem der Körper anfängt, von der schiefen Ebene herabzugleiten, desto kleiner, je schwerer der Körper ist. Wird z. B. ein Schiff vom Stapel gelassen, so gleitet es auf schiefen Ebenen fort, deren Neigung sehr gering ist, und auf welchen ein Körper von geringem Gewichte nicht fortgleiten würde.

§. 95. Eine Eigenschaft, wodurch sich die Reibung von andern

Kräften unterscheidet, ist die, dass sie nur dann wirkt, wenn ein Bestreben zur Bewegung vorhanden ist, welche sie zu verhindern strebt, und dass sie desto größer ist, je größer dieses Bestreben wird. Wenn z. B. die Ebene AB (Fig. **163.**) horizontal ist, so ist die Reibung Null, und sie nimmt mit der Neigung der Ebene zu, und ist jeden Augenblick so groß, als zur Verhinderung des Herabgleitens des Körpers erforderlich ist, bis endlich ihre Grenze überschritten wird, und wenn der Körper ein Bestreben hätte, nach entgegengesetzter Richtung fortzugleiten, so würde auch die Reibung nach entgegengesetzter Richtung wirken.

Durch diese Eigenschaft der Reibung werden alle Bedingungen des Gleichgewichtes der Körper in der Wirklichkeit merkwürdig verändert; denn dieser Wirkung der Reibung ist es zuzuschreiben, dass das Gleichgewicht nicht gestört wird, obgleich die in dem Vorhergehenden aufgestellten Bedingungen desselben nicht mehr erfüllt werden. Die Kraft der Reibung erhält das System innerhalb gewisser Grenzen, obgleich es den Bedingungen des Gleichgewichtes nicht genügt, wofern diese Bedingungen nur nicht zu sehr überschritten werden.

§. **96.** Bei der Bestimmung der Bedingungen des Gleichgewichtes eines Gewölbbogens haben wir z. B. gefunden, welche Gewichte die Theile desselben haben müssen, damit sie kein Bestreben bekommen, an einander hinzugleiten (§. **81.**). Aber in der Wirklichkeit kann die Aufhebung des Gleichgewichtes auf diese Weise fast nie stattfinden.

Aufgabe. Wenn zwischen zwei einander berührenden Ebenen Reibung stattfindet, die Richtung zu bestimmen, welche die Berührungsebene haben muss, damit dieselbe Wirkung ohne Reibung hervorgebracht wird.

Es seien **C** und C_1 (Fig. **164.**) die Mittelpunkte zweier Körper, welche mit der Fläche **PQ** in Berührung sind, und **M** sei der Punkt, an welchem die gegenseitige Einwirkung der Flächen auf einander stattfindet. Die auf **MQ** genommene Länge **Mn** drücke die Reibung und die auf **Mn** senkrechte Linie **nc** den Druck aus, so dass sich verhält **Mn : nc = f : 1.** Wenn alsdann die ganze Reibung nach der Richtung **PQ** in Thätigkeit tritt, so setzt sich die auf **M** wirkende Kraft aus **Mn** und **nc** zusammen und wird der Größe und Richtung nach durch **Mc** ausgedrückt, und wenn ebenso **Mc′** nach entgegengesetzter Richtung von **M** aus gezogen wird, so drückt **Mc′** die Richtung der in **M** wirkenden Kraft aus, wenn die ganze Reibung nach der Richtung **QP** in Thätigkeit gesetzt wird.

Der Grad der Reibung, welcher in Wirklichkeit ausgeübt wird, hängt davon ab, was zur Erhaltung des Gleichgewichtes noch erforderlich ist, und die resultirende Kraft muß daher eine zwischen **Mc** und

Mc′ liegende Richtung haben. Wenn wir pq senkrecht auf Mc ziehen, und annehmen, dass pq die Berührungsebene ist, so ist die Wirkung der Berührung ohne Reibung eine nach der Richtung Mc wirkende Kraft, und ebenso, wenn p′q′ auf Mc′ senkrecht ist, so erfolgt die auf die Fläche p′q′ ausgeübte Wirkung nach der Richtung Mc′. Wir können also annehmen, dass die Berührungsfläche irgend eine zwischen pq und p′q′ fallende Lage habe, und wenn irgend eine dieser Lagen das Gleichgewicht ohne Reibung erhält, so erhält die Fläche PQ dasselbe mit Reibung.

§. 97. Aufgabe. Die Wirkung der Reibung bei der Erhaltung des Gleichgewichtes der Gewölbbogen zu erklären.

Wenn keine Reibung stattfindet, so sind die Bedingungen des Gleichgewichts eines Gewölbbogens: 1) dass der Druck auf die Gewölbsteine den Unterschieden der Tangenten der Winkel proportional ist, welche die Fugen mit der Verticale bilden, und 2) dass die Linie des Druckes innerhalb der Gewölbsteine fällt. Die Wirkung der Reibung hat auf diese letzte Bedingung keinen Einfluss, außer, insofern in der Masse Cahäsion stattfindet (§. 86. d.). Aber in Beziehung auf die erste Bedingung besteht diese Wirkung darin, dass eine Fuge PQ (Fig. 164.) irgend eine Lage zwischen den Grenzlagen pq und p′q′ annehmen kann, ohne dass das Gleichgewicht gestört wird, indem die Tangente des Grenzwinkels PMp oder PMp′ dem Reibungscoefficienten f gleich ist.

Wenn keine Reibung stattfindet, so ist die Linie des Druckes des Gewölbbogens ein Vieleck, wovon ein Winkel auf der Richtung der auf jeden Gewölbstein wirkenden Kraft liegt, und dessen Schenkel senkrecht auf den Fugen sind. Aber bei der Wirkung der Reibung ist die Linie des Druckes ein Vieleck, dessen Seiten auf jeder Seite des Perpendikels irgendwelche innerhalb des Grenzwinkels liegende Winkel bilden. Wenn die Lagen der Fugen gegeben sind, so kann man bei irgend einem Punkte anfangen und die Linie des Druckes des Gewölbbogens ziehen, indem man an jeder Fuge den Grenzwinkel auf einer Seite des Perpendikels bildet, und ebenso kann man von demselben Punkte an die Linie des Druckes des Gewölbbogens ziehen, wenn man an jeder Fuge den Grenzwinkel auf der andern Seite des Perpendikels bildet. Auf diese Weise erhält man zwei Grenzen der Drucklinien, und wenn eine derselben, oder irgend eine zwischen ihnen liegende in die Gewölbsteine fällt, so findet das Gleichgewicht statt.

Wenn die Form des als kurz vorausgesetzten Gewölbbogens gegeben ist, so müssen die Fugen, wenn keine Reibung vorhanden ist, senk-

recht auf der Krümmung desselben sein; aber wenn Reibung stattfindet, so können sie mit dieser Richtung irgend einen Winkel bilden, welcher nicht größer ist als der Grenzwinkel.

Wenn die auf jeden Gewölbstein wirkende Kraft vertical und gegeben ist, so sind, wenn eine Fuge bekannt ist, und keine Reibung stattfindet, auch alle übrigen bekannt. Denn wenn in Figur 90. die Linien XT, TT_1, T_1T_2, ... gegeben sind, und eine der Linien TO bekannt ist, so ist auch die Lage des Punktes O bekannt, und folglich die Lagen aller der Linien TO, T_1O, T_2O, ... zu welchen die Fugen parallel sind, und wenn die Fugen gegeben sind, so kann die Linie des Druckes gefunden werden, und diese Linie muss innerhalb der Gewölbsteine fallen. Aber wenn Reibung stattfindet, so kann jede Fuge von der so gefundenen Lage um irgend einen Winkel abweichen, welcher kleiner ist, als der Grenzwinkel, und auf diese Weise werden nach den eben auseinandergesetzten Prinzipien die Grenzen bestimmt, innerhalb welcher das Gleichgewicht noch möglich ist.

II. Reibung zwischen cylindrischen Oberflächen bei ihrer gegenseitigen Berührung.

§. 98. Es seien cn, dn (Fig. 165.) zwei Kreise, welche sich im Punkte n von innen berühren. Wenn diese beiden Kreise die Enden zweier Cylinder sind, so berühren sich die cylindrischen Oberflächen nach einer geraden Linie, und wenn der eine der beiden Cylinder sich so drehet, dass er auf dem andern fortgleitet, so findet zwischen beiden eine Reibung statt, welche, wie im vorhergehenden Falle, dem Drucke R proportional ist, d. h. diese Reibung ist $= fR$; aber der Bruch f hat hier einen andern Werth als im erstern Falle. Wenn z. B. beide Cylinderflächen Holz sind, so ist $f = \frac{1}{12}$, und wenn sich Eisen auf Messing drehet, so ist $f = \frac{1}{7}$. Diese Art von Reibung findet an der Axe eines Hebels, einer Rolle u. s. w. statt, und wir wollen noch ihre Wirkung in einem solchen Falle betrachten.

§. 99. Aufgabe. Die Grenzen zu finden, innerhalb welcher die Reibung das Gleichgewicht des Hebels erhalten kann.

Es sei AB (Fig. 165.) ein Hebel, welcher aus einer starren Stange besteht, die mit einem cylindrischen Loche yn durchbrochen ist, vermittelst dessen sie sich um einen festen Cylinder xn drehet, welcher einen etwas kleinern Durchmesser hat als das Loch; so findet die Reibung in dem Punkte n statt und wirkt hier nach der Richtung der gemeinschaftlichen Tangente der beiden Kreise xn, yn, oder der beiden Oberflächen. Auf den Hebel mögen in A und B die Kräfte P und Q

wirken und denselben nach der Richtung AP zu drehen streben, so wirkt die Reibung nach der Richtung nF. Alle auf den Hebel wirkenden Kräfte P, Q sind gleichgeltend mit einer einzigen Kraft, welche nach irgend einer Richtung HG wirkt und diese Kraft hält in Verbindung mit der Reibung nF den Hebel an dem Punkte n der Oberfläche des Cylinders xn im Gleichgewichte. Folglich muss die aus der Zusammensetzung dieser Kräfte hervorgehende Kraft durch den Punkt n gehen, und mithin muss auch GH durch den Punkt n gehen. Ferner muss die Mittelkraft aus den beiden Kräften nF und nG senkrecht auf der Oberfläche des Cylinders xn sein, und folglich durch den Mittelpunkt c gehen. Wenn also GK senkrecht auf nc ist, so müssen sich die Kräfte nF und nG wie GK und nG verhalten. Aber alsdann wird auch der Druck auf den Cylinder xn durch nK ausgedrückt, und wir haben folglich in diesem äußersten Falle:

$$GK = f.nK \text{ und } nG = \sqrt{1+f^2}.nK.$$

Wenn S die Mittelkraft aus den Kräften P, Q und R der Druck auf den Cylinder ist, so haben wir:

$$S = \sqrt{1+f^2}.R, \text{ und } R = \frac{S}{\sqrt{1+f^2}}.$$

Es sei $ch = s$ senkrecht auf HQ, und der Halbmesser $cn = r$, so geben die ähnlichen Dreiecke:

$$ch : cn = GK : Gn,$$

oder: $$s : r = fR : \sqrt{1+f^2}.R$$

also: $$s = \frac{fr}{\sqrt{1+f^2}}.$$

Dieses ist die Bedingung für den Grenzfall des Gleichgewichtes. Wenn also die Mittelkraft der Kräfte P und Q durch den Punkt c geht, so findet ohne die Wirkung der Reibung das Gleichgewicht statt; aber wenn diese Mittelkraft in einer Entfernung s von c hindurch geht, so wird das Gleichgewicht durch die Reibung so lange erhalten, als s nicht größer ist, als $\frac{fr}{\sqrt{1+f^2}}$.

Zusatz 1. Hieraus folgt $\cos Gnc = \frac{ch}{en} = \frac{s}{r} = \frac{f}{\sqrt{1+F^2}}$

Zusatz 2. Ferner ist $\text{tang } Gnc = f$.

Dynamik.

Erstes Kapitel.

Erklärungen und Prinzipien.

§. **100.** Die Dynamik ist der Theil der Mechanik, welcher sich mit der Betrachtung und Untersuchung der Kräfte, insofern sie Bewegung hervorbringen, beschäftigt. Wenn bei irgend einer der im Vorhergehenden betrachteten Maschinen und mechanischen Verbindungen die Kräfte nicht in der zum Gleichgewichte erforderlichen Relation zu einander stehen, so wird durch den Kraftüberschuss Bewegung hervorgebracht. Wenn z. B. die Gewichte P, Q und W (Fig. **29.**) nicht das Verhältniss zu einander haben, welche das Gleichgewicht bei ihrer Lage erfordert, so bewegen sie sich auf eine von ihren Größen abhängige Weise, und die Gesetze, welche wir nun zu erörtern haben, müssen so beschaffen sein, dass sich darnach die Bewegungen, wie die in Rede stehenden, berechnen lassen.

§. **101.** Der Druck, welcher eine Bewegung hervorbringt, muss als von derselben Art, wie der Druck in der Statik, betrachtet werden. Es seien z. B. A, B (Fig. **136.**) zwei gleichschwere Körper, welche an einer über eine Rolle E gehenden Schnur hängen, so halten sie einander das Gleichgewicht, weil sie an der Schnur AEB gleiche und entgegengesetzte Druckkräfte ausüben, und es findet keine Bewegung statt. Wird aber nun zu A ein Gewicht P hinzugelegt, so bewirkt der Druck von P, dass sich der Körper A nieder- und B aufwärts bewegt. In diesem Falle übt die Schnur ihre Spannung auf A und B gleich und in entgegengesetzten Richtungen aus; die Masse A + P wird durch ihr Gewicht A + P niederwärts und durch die Spannung der Schnur aufwärts gezogen und bewegt sich vermöge des Unterschiedes dieser Kräfte niederwärts. Ebenso wird die Masse B durch die Spannung der Schnur aufwärts und durch ihr Gewicht niederwärts gezogen und steigt vermöge des Unterschiedes dieser beiden Kräfte aufwärts.

In diesem Falle bewegen sich die Körper nach den Richtungen der Kräfte; aber wenn wir annehmen, dass sich eins der Gewichte nach einer gegen die Richtung der Kraft schiefen Richtung bewegen muss, wie dieses mit P (Fig. **98.**) der Fall ist, so wirken, wenn sich P und Q bewegen, die Druckkräfte nach schiefen Richtungen, und müssen nach den in §. **27.** über die Zerlegung der Kräfte angegebenen Regeln zerlegt werden, um den Druck zu erhalten, der die Bewegung hervorbringt.

Um die Wirkung der unter gegebenen Umständen Bewegung hervorbringenden Druckkräfte bestimmen zu können, wollen wir zunächst

die drei Gesetze der Bewegung näher erörtern, indem wir zugleich die Messung der Geschwindigkeit der beschleunigenden und der bewegenden Kraft erklären.

§. **102.** Alle Bewegungen erfolgen in der Zeit und die dazu gebrauchte Zeit wird durch die Anzahl der Zeiteinheiten ausgedrückt, welche darin enthalten sind. Der Vorübergang der Zeit wird durch die in ihr stattfindenden Ereignisse bemerkbar, und solche Zeitintervalle, für deren Ungleichheit kein wahrnehmbarer Grund vorhanden ist, werden als gleich angenommen. Das Zeitintervall, welches in allen Ländern als Grundmaß angenommen wird, ist der natürliche Tag und seine Abtheilungen. Die Zeiteinheit ist ein beliebiger Theil des Tages, und in der Mechanik wird die Secunde allgemein als Einheit angenommen.

§. **103.** Die Geschwindigkeit ist das Maß des Grades, in welchem sich ein Körper schnell oder langsam bewegt, oder man sagt, ein Körper habe eine größere Geschwindigkeit als ein anderer, wenn er sich in derselben Zeit durch einen größern Raum, oder in einer kürzern Zeit durch einen gleichen Raum bewegt.

Wenn sich ein Körper in successiven gleichen Zeiten durch gleiche Räume bewegt, wie klein diese Räume auch sein mögen; so nennt man seine Bewegung gleichförmig, und die Geschwindigkeit wird durch den in der Zeitheit, z. B. in einer Secunde, beschriebenen Raum gemessen.

Bei der veränderlichen Bewegung wird, wie wir später sehen werden, die Geschwindigkeit durch den Raum gemessen, welcher in der Zeiteinheit beschrieben würde, wenn die Geschwindigkeit gleichförmig wäre.

§. **104.** Lehrsatz. Bei der gleichförmigen Bewegung ist der während einer Zeit beschriebene Raum gleich dem Producte der Zahlen, welche resp. die Geschwindigkeit und die Zeit ausdrücken.

Denn es sei v die in Fußen ausgedrückte Geschwindigkeit, so drückt v nach dem letzten §. die in einer Secunde beschriebene Anzahl von Fußen aus, und da die Bewegung gleichförmig ist, so ist 2v der in 2 Secunden, 3v der in 3 Secunden und allgemein tv der in t Secunden beschriebene Raum. Bezeichnen wir also den Raum allgemein mit s, so ist $s = tv$.

Denken wir uns den Raum als in gleichen Theilen der Secunde beschrieben, so gilt die Gleichung $s = tv$ auch dann, wenn t ein Bruch oder eine gemischte Zahl ist.

Zusatz. Aus $s = tv$ folgt $v = \frac{s}{t}$. Folglich ist bei gleichförmigen Bewegungen der Quotient aus dem beschriebenen Raume und der dazu gebrauchten Zeit constant und ein Maß der Geschwindigkeit.

Wenn z. B. ein Schiff bei gleichförmiger Bewegung in 1 Stunde 10 engl. Meilen zurücklegt, so ist die Geschwindigkeit oder der in der Secunde beschriebene Raum $= \frac{10 \times 5280}{60 \times 60} = 14\frac{2}{3}$ Fuß.

§. **105.** Wenn die Geschwindigkeit nicht gleichförmig ist, so kann sie nicht mehr durch den Quotienten aus dem Raume und der Zeit gemessen werden; denn dieser Quotient ist für verschiedene Zeiten verschieden. Wenn z. B. die Gewichte P, A und B (Fig. **136.**) ein solches Verhältniss zu einander haben, dass A in den 4 ersten Secunden von der Ruhe aus einen Raum von 16 Fuß beschreibt, so bewegt es sich nicht mit einer gleichförmigen, sondern mit einer zunehmenden Geschwindigkeit, und wenn wir den Raum messen, welchen das Gewicht A in den 4 folgenden Secunden durchläuft, so finden wir, dass derselbe $= 48$ Fuß ist. Ebenso finden wir, dass die Räume, welche das Gewicht A vom Ende der 4ten Secunde angerechnet in 3, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ Sec. durchläuft, resp. gleich 33, 20, 9, $4\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{16}$ Fuß sind. Wir haben also folgendes Schema:

Werthe der Zeit t ...	$4''$	$3''$	$2''$	$1''$	$\frac{1}{2}''$	$\frac{1}{4}''$
" des Raumes s ...	48	33	20	9	$4\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{16}$
" des Quotienten $\frac{s}{t}$	12	11	10	9	$8\frac{1}{2}$	$8\frac{1}{4}$.

Die Quotienten nehmen also vom Anfange der fünften Secunde an gezählt zu, und sind desto größer, je größere Zeiträume vom Ende der 4ten Secunde an betrachtet werden. Dieses ist immer der Fall, wenn die Geschwindigkeit zunimmt; denn der vom Anfange irgend einer Zeit beschriebene Raum hängt sowohl von der Geschwindigkeit, als von der Zeit, wie auch von der spätern Zunahme der Geschwindigkeit ab. Ferner ist der Theil des beschriebenen Raumes, welcher von dieser Zunahme der Geschwindigkeit herrührt, desto kleiner, je kleiner die Zeit der Bewegung ist, und je mehr wir uns dem anfänglichen Zeitpunkte nähern, desto mehr nähern wir uns auch der Geschwindigkeit in diesem Zeitpunkte.

§. **106.** Hiernach wird die **Geschwindigkeit** in irgend einem Punkte durch die **Grenze** des Quotienten aus dem Raume und der Zeit, welche von dem bestimmten Zeitpunkte an verflossen, und während welcher der Raum beschrieben ist, gemessen, und diese Grenze

wird gefunden, wenn man die Zeit und den Raum ohne Ende abnehmen lässt.

Wenn wir in dem obigen Beispiele für t noch kleinere Werthe, z. B. $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, ... genommen hätten, so wäre der Werth von $\frac{s}{t}$ immer größer als 8; aber der Ueberschuss über 8 würde immer kleiner, je mehr s und t abnehmen, und könnte kleiner werden, als jede angebbare Größe. Folglich ist in dem obigen Beispiele 8 die Grenze des Bruches $\frac{s}{t}$, und mithin ist die Geschwindigkeit des Körpers im Anfange der 5ten Secunde = 8 Fuß.

Wenn wir die Zeit nicht unmittelbar nach, sondern vor dem betrachteten Zeitpunkte nähmen, so würden wir ähnliche Resultate erhalten.

§. **107.** Lehrsatz. Bei jeder Bewegung wird die Geschwindigkeit durch den Raum gemessen, welcher in der Zeiteinheit beschrieben wäre, wenn die Geschwindigkeit constant geblieben wäre.

Die Geschwindigkeit nehme zu, und es sei s′ der Raum, welcher von dem gegebenen Punkte an in der Zeit t beschrieben wäre, wenn die Geschwindigkeit während dieser Zeit constant geblieben wäre, und $s' + s''$ sei der während dieser Zeit t wirklich beschriebene Raum, so ist nach dem vorhergehenden §. die Grenze des Verhältnisses $\frac{s' + s''}{t}$ das Maß der Geschwindigkeit. In diesem Ausdrucke ist aber s″ der Theil, welcher von der Zunahme der Geschwindigkeit, von dem gegebenen Punkte an gerechnet, herrührt, und der Einfluss dieser Zunahme wird offenbar um so kleiner, je kleiner t wird. Nimmt man also die Grenze, so muss s″ verschwinden, und folglich ist die Grenze von $\frac{s' + s''}{t}$ gleich, $\frac{s'}{t}$ und $\frac{s'}{t}$ ist folglich das Maß der Geschwindigkeit.

Wenn $t = 1$ ist, so ist s der in der Zeiteinheit beschriebene Raum, wenn man annimmt, dass die Geschwindigkeit constant geworden ist. Folglich misst der so beschriebene Raum die Geschwindigkeit, und dasselbe findet statt, wenn die Geschwindigkeit abnimmt.

§. **108.** Lehrsatz. Wenn s den Raum, v die Geschwindigkeit und t die Zeit bezeichnet, so ist: $v = \frac{ds}{dt}$.

Denn nach der Definition des Differentialquotienten ist der Differentialquotient von s in Beziehung auf t die Grenze des Quotien-

ten aus den Incrementen von s und t, und folglich ist nach §. 106. der Differentialquotient $\frac{ds}{dt}$ gleich der Geschwindigkeit.

Von den Gesetzen der Bewegung.

§. 109. Es ist bereits früher bemerkt, dass wir in der Mechanik annehmen, dass die materielle Welt durch unveränderliche und bestimmte Gesetze regiert wird, was wir auch dadurch ausdrücken können, dass wir sagen: dass in den Fällen, welche wir betrachten, keine Veränderung ohne eine Ursache stattfinden kann, und dass diese Ursachen durch ihre Wirkungen gemessen werden.

Zu diesen beiden Grundsätzen, welche die Grundlage der ganzen Naturphilosophie bilden, müssen wir in Beziehung auf die besondere Art von Ursachen, welche wir hier betrachten, nämlich auf die Kräfte, als Ursachen der Bewegung oder des Bestrebens zur Bewegung, noch einen andern hinzufügen. Die Kraft wird, wie wir bereits früher gesehen haben (§. 10.), als ein Druck betrachtet, und es ist ein in allen Theilen der mechanischen Wissenschaften gültiger, allgemeiner Grundsatz, dass, wenn ein Druck auf irgend einen Punkt ausgeübt wird, an demselben Punkte auch ein gleicher und entgegengesetzter Druck stattfindet, oder wie man sich gewöhnlich ausdrückt: die Wirkung einer Kraft oder eines Druckes ist immer mit einer gleichen und entgegengesetzten Gegenwirkung verbunden.

Diese Prinzipien bilden die nothwendige Basis der Lehre von den Bewegung hervorbringenden Kräften; allein sie müssen noch durch Beobachtung und Erfahrung nachgewiesen und erklärt werden.

§. 110. Die Geschwindigkeit und Richtung der Bewegung eines Körpers werden durch die auf ihn wirkenden Kräfte bestimmt, und die einfachsten Prinzipien, auf welche die Relation zwischen diesen Größen zurückgeführt werden kann, werden Bewegungsgesetze genannt, und wir müssen diese Bewegungsgesetze zuerst in dem Falle betrachten, wo auf den Körper noch keine Kraft wirkt, sondern er sich selbst überlassen ist.

Erstes Bewegungsgesetz. — Wenn sich ein Körper in Bewegung befindet, und auf denselben keine Kraft wirkt, so bewegt er sich in gerader Linie mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit.

Dieses Gesetz besteht aus zwei Theilen, nämlich 1) dass sich der Körper nach einer geraden Linie bewegt, und 2) dass er sich mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit bewegt.

1) Er bewegt sich in einer geraden Linie, weil keine Kraft auf ihn wirkt, d. h. weil keine Ursache vorhanden ist, welche die Richtung seiner Bewegung zu verändern strebt; diese Richtung bleibt also ungeändert, und der Weg, welchen der Körper beschreibt, ist folglich eine gerade Linie.

2) Der Körper bewegt sich mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit; denn da keine Kraft auf ihn wirkt, so ist auch keine Ursache vorhanden, welche seine Geschwindigkeit verändern kann, wofern dieses nicht eine von der Zeit abhängige Ursache ist, welche diese Wirkung hervorbringt, und es fragt sich also, ob die Zeit allein eine Ursache der Veränderung der Geschwindigkeit ist?

Anfangs könnte es scheinen, als ob die Zeit allein ein Bestreben hätte, die Geschwindigkeit zu vermindern; denn bei allen Körpern, welche wir in Bewegung sehen, beobachten wir, dass sie sich immer langsamer und langsamer bewegen und zuletzt zur Ruhe kommen. Allein bei näherer Betrachtung finden wir, dass außer dem Verfließen der Zeit immer noch eine andere Ursache vorhanden ist, welche diese Verminderung der Geschwindigkeit bewirkt, nämlich irgend ein Hinderniß, wie die Reibung, der Widerstand des Mittels, worin sich der Körper bewegt, welche die Geschwindigkeit des Körpers aufzuheben streben; aber die Zeit ist nur in sofern die Ursache der Veränderung, als sie erforderlich ist, damit irgendwelche andere Ursachen ihre Wirkungen hervorbringen können.

Wenn eine Kugel auf einer horizontalen Ebene fortbewegt wird, wie beim Kegelspiel, oder wenn ein auf seiner Axe ruhendes Rad eine drehende Bewegung erhalten hat, oder wenn ein frei herabhängendes Pendel Schwingungen macht,*) so hören diese Bewegungen schon nach einer kurzen Zeit auf; aber dieses Aufhören der Bewegung hat in äußern Ursachen, die in diesem Falle wirken, seinen Grund, indem die Kugel durch die Reibung an der Oberfläche, auf welcher sie fortrollt, das Rad durch die Reibung an der Welle einen Wider-

*) Es ist leicht einzusehen, dass in dem ersten dieser drei Fälle die Wirkung der Schwere die Geschwindigkeit nicht zu verzögern strebt, ausgenommen, dass sie eine Reibung an der Ebene veranlasst, und dass in den beiden andern Fällen die Bewegung, obgleich sie nicht geradlinigt ist, ebenfalls fortdauern würde, wenn die geradlinige Bewegung ohne Ende fortdauerte. In dem Falle des Rades heben sich die Wirkungen der Schwere auf die verschiedenen Theile gegenseitig auf, so dass daraus keine verzögernde Kraft hervorgeht, und bei dem Pendel wären die abwechselnd erzeugten und aufgehobenen Größen der Geschwindigkeit stets dieselben, wenn die im Texte angeführten Hindernisse nicht vorhanden wären.

stand erleidet, so wie überhaupt in allen Fällen auch der Widerstand der Luft als ein Hinderniss der Bewegung wirkt. Die Ursache der Verzögerung der Bewegung in diesen Fällen ist also nicht die Zeit, sondern gewisse äußere Kräfte. Auch finden wir, dass die Bewegungen desto länger dauern, und die Verzögerung beliebig vermindert werden kann, je vollkommener die Hindernisse entfernt werden. So kommt z. B. eine Kugel, welche auf einem rauhen Boden in Bewegung gesetzt wird, bald zur Ruhe, ihre Bewegung dauert länger fort auf einem Pflaster, und wenn sie sich auf glattem Eise bewegt, so verliert sie ihre Geschwindigkeit nur sehr langsam, und legt einen sehr langen Weg zurück, ehe sie stehen bleibt; aber ihre Bewegung wird durch den Widerstand der Luft und durch die Reibung an dem Eise, welches ebenfalls nicht vollkommen glatt ist, verzögert. Desgleichen, wenn bei der Bewegung des Rades die Reibung an der Axe durch Anwendung von Frictionsrädern vermindert wird, so dauert diese Bewegung länger fort, und wenn auch der Widerstand der Luft entfernt wird, indem man den Versuch im luftleeren Raume anstellt, so scheint die Bewegung fast unverändert zu bleiben, und dauert sehr lange fort.*)

Ebenso, ein Pendel, welches in der Luft schon nach kurzer Zeit aufhört zu schwingen, setzt im leeren Raume seine Schwingungen eine lange Zeit fort, und zwar desto länger, je vollkommener der leere Raum ist.

Aus diesen und ähnlichen Beispielen dürfen wir also schließen, dass, wenn wir die äußern Kräfte ganz beseitigen könnten, welche die Bewegungen der Körper verzögern, sie ihre einmal erhaltene Bewegung unverändert beibehalten würden, und folglich ist die Zeit allein keine Verzögerungsursache.

---

*) Versuche, welche zeigen, dass die drehende Bewegung gleichförmig zu werden strebt, wenn der Widerstand der Luft entfernt wird, findet man in den Nachrichten über die Wirkungen der Luftpumpe, und über die Wirkungen der Frictionsräder in den Phil. Trans. Vol. III.

Die unbestreitbare Auctorität, welche gegenwärtig die in diesem Kapitel angeführten Bewegungsgesetze erlangt haben, ist das Resultat zahlloser, niemals aufgezeichneter Versuche und jetzt vergessener Untersuchungen, welche während des 17ten Jahrhunderts angestellt wurden. Sowohl von einzelnen Personen, als von gelehrten Gesellschaften wurden viele Versuche gemacht, fast jeden der Sätze zu beweisen, welche jetzt als für sich klar betrachtet werden, und ein Versuch, durch welchen das erste Gesetz bewiesen werden sollte, wurde 1669 von Hooke vor der königlichen Societät zu London angestellt, wovon sich eine Nachricht in Birch's History of the Royal Society. Vol. II. pag. 342. befindet.

Wenn also auf einen in Bewegung befindlichen Körper keine äußere Kraft wirkt, so ist seine Geschwindigkeit gleichförmig.

§. 111. Unter solchen Umständen setzt also der Körper seine Bewegung ohne Ende fort.

§. 112. Aus diesem ersten bewiesenen Bewegungsgesetze folgt, dass, wenn sich ein als ein Punkt betrachteter Körper entweder in einer krummen, oder geraden Linie mit einer veränderlichen Geschwindigkeit bewegt, auf denselben irgend eine äußere Kraft wirken muss, und die größere oder geringere Abweichung von der geradlinigen und gleichförmigen Bewegung hängt von der Richtung und Größe der auf den Körper wirkenden Kraft ab.

Die Richtung einer Kraft ist die gerade Linie, nach welcher sie einen Körper bewegen würde, wenn sich derselbe zuvor in Ruhe befände. Wenn eine Kraft auf einen bereits in Bewegung befindlichen Körper wirkt, so verbindet sich die Bewegung, welche diese Kraft diesem in Ruhe befindlichen Körper mittheilen würde, mit der Bewegung, welche der Körper bereits hat, nach später anzuführenden Gesetzen. Wenn eine Kraft auf einen bereits in Bewegung befindlichen Körper wirkt, und die Richtung dieser Kraft mit der Richtung der Bewegung des Körpers zusammenfällt, so wird der Körper offenbar weder nach der einen, noch nach der andern Seite von dieser Richtung abweichen; aber er bewegt sich in dieser Richtung mit einer veränderten Geschwindigkeit. Wenn die Richtung einer Kraft mit der Richtung der Bewegung des Körpers einen Winkel bildet, so bewirkt sie, dass der Körper eine krummlinige Bahn beschreibt, indem die Concavität dieser Bahn nach der Seite gekehrt ist, gegen welche die Kraft wirkt.

Da die Ursachen durch ihre Wirkungen gemessen werden, so wird die Größe der Kräfte auch durch ihre Wirkungen gemessen, und die Wirkung der Kräfte, welche wir in der Dynamik betrachten, ist die Geschwindigkeit.

Kräfte sind also größer oder kleiner, je nachdem sie in derselben Zeit eine größere oder kleinere Geschwindigkeit hervorbringen.

§. 113. Eine beschleunigende Kraft ist eine solche, welche durch die Geschwindigkeit gemessen wird, die sie in einer gegebenen Zeit einem Körper mittheilt.

Wenn eine beschleunigende Kraft auf einen Körper nach der Richtung seiner Bewegung wirkt, und seine Geschwindigkeit in gleichen Zeiten um gleiche Größen vermehrt, so wird die Kraft eine gleichförmige oder constante beschleunigende Kraft genannt.

Wenn auf einen Körper eine stetigwirkende Kraft, wie eine Druck-

oder Anziehungskraft wirkt, so wird die dem Körper mitgetheilte Geschwindigkeit desto größer, je längere Zeit die Kraft auf denselben wirkt. So ist z. B. die Geschwindigkeit eines Steines, welcher während einer Secunde von der Ruhe ausfällt, am Ende dieser ersten Secunde kleiner als die Geschwindigkeit eines während zwei Secunden herabgefallenen Steines am Ende der zweiten Secunde, weil die Schwere auf letztern eine längere Zeit hindurch gewirkt hat. Desgleichen, wenn wir durch die fortwährende Wirkung der Hand eine Geschwindigkeit hervorbringen, z. B. mit derselben eine Maschine mit einem Schwungrade drehen, oder vermittelst einer Feder einem Körper eine Geschwindigkeit ertheilen, wie einem Pfeile durch einen Bogen; so nimmt die Geschwindigkeit so lange zu, als die Wirkung der Kraft fortdauert. Nehmen wir alsdann an, dass in irgend einem Zeitpunkte die Wirkung der Kraft aufhört, so bewegt sich der Körper mit der bereits erlangten Geschwindigkeit gleichförmig nach einer geraden Linie fort, und wenn hierauf die Kraft wieder anfängt, nach der Richtung der Bewegung des Körpers zu wirken, so wird dem Körper ein neuer Zusatz von Geschwindigkeit ertheilt. Wenn also eine Kraft auf einen in Ruhe befindlichen Körper wirkt, so ertheilt sie demselben eine gewisse Geschwindigkeit, und wenn sie auf einen bereits in Bewegung befindlichen Körper wirkt, so vergrößert sie seine Geschwindigkeit. Wenn die Kraft während irgend einer Zeit auf den Körper wirkt, so bekommt seine Geschwindigkeit während dieser ganzen Zeit immer neue Zuwächse und die am Ende dieser Zeit hervorgebrachte Geschwindigkeit ist die Summe aller dieser successiven Zuwächse. Wenn unter diesen Umständen die Zunahmen der Geschwindigkeit in gleichen Zeiten gleich sind, so wird die Kraft eine gleichförmige oder constante beschleunigende Kraft genannt.

§. **113.** a. Die Schwere ist eine gleichförmige beschleunigende Kraft. Dieses wird durch das Experiment und den Calcul bewiesen. Die Gesetze des Zusammenhanges zwischen der Zeit und dem Raume, welche aus der obigen Definition der gleichförmig beschleunigenden Kraft folgen, sind auch auf den Fall schwerer Körper anwendbar, und werden in dem Kapitel von der gleichförmig beschleunigten Bewegung angegeben werden, und diese Uebereinstimmung wurde von Galiläi vermittelst der geneigten Ebene und von Atwood vermittelst seiner Fallmaschine dargethan. Genau genommen verhält sich die Sache in historischer Hinsicht nicht so; denn Galiläi nahm an, dass die Schwere eine gleichförmig beschleunigende Kraft sei, und bewies durch das Experiment, das für diese gleichförmige Kraft die Geschwindigkeit der Zeit proportional zunahm.

§. 113. b. Eine gleichförmig beschleunigende Kraft wird durch die Geschwindigkeitszu- oder Abnahme gemessen, welche sie in einer gegebenen Zeit, z. B. in der Secunde, bewirkt. So wird z. B. die Schwere, welche einem freifallenden Körper in jeder Secunde eine Geschwindigkeitszunahme von $32\frac{1}{5}$ engl. Fuß ertheilt, durch diese Geschwindigkeitszunahme, d. h. durch $32\frac{1}{5}$ englische Fuß ausgedrückt, und alsdann wird jede andere gleichförmig beschleunigende Kraft, z. B. eine solche, welche in der Secunde eine Geschwindigkeitszunahme von 1 Fuß bewirkt, ebenfalls durch letztere gemessen, und ihre Intensität oder Stärke verhält sich zu der Schwere, wie $1 : 32\frac{1}{5}$ oder wie $10 : 322$.

§. 114. Lehrsatz. Bei gleichförmig beschleunigenden Kräften ist die während irgend einer Zeit erzeugte Geschwindigkeit, gleich dem Producte aus der Kraft und der Zeit.

Wenn f die beschleunigende Kraft bezeichnet, so ist f die in einer Secunde erzeugte Geschindigkeit oder Geschwindigkeitszunahme, und da die Kraft f eine gleichförmig beschleunigende ist; so ist die Geschwindigkeit am Ende der zweiten Secunde $= 2f$, am Ende der dritten Secunde $= 3f$, und allgemein am Ende der tten Secunde $= tf$. Bezeichnen wir also die Geschwindigkeit mit v, so ist $v = tf$.

Wenn die in gleichen Theilen der Secunde erzeugten Geschwindigkeiten einander gleich sind, so gilt diese Gleichung auch für den Fall, wo t eine gebrochene oder gemischte Zahl ist.

Zusatz. Aus der Gleichung $v = tf$ folgt $f = \frac{v}{t}$. Bei gleichförmig beschleunigenden Kräften ist also der Quotient aus der, während irgend einer Zeit erzeugten Geschwindigkeit und dieser Zeit constant und ein Maß der beschleunigenden Kraft. Wenn also in §. 106. während 4 Secunden eine Geschwindigkeit von 8 Fuß erzeugt wurde, so war die beschleunigende Kraft $= \frac{8}{4} = 2$. Die durch die Schwere in einer Secunde erzeugte Geschindigkeit ist $= 32\frac{1}{5}$ engl. Fuß, und folglich die beschleunigende Kraft der Schwere $= 32\frac{1}{5}$.*)

---

*) Nach einigen Schriftstellern ist die in 1 Sec. erzeugte Geschwindigkeit der Kraft nicht gleich, sondern proportional, und hierbei wird die Schwerkraft als Einheit angenommen. Wenn wir also $32\frac{1}{5}$ Fuß $= g$ setzen, und F irgend eine andere Kraft bezeichnet, welche in 1 Sec. eine Geschwindigkeit f erzeugt, so ist:

$$F : 1 \text{ (Schwere)} = f : g; \text{ also } F = \frac{f}{g}, \text{ ferner } \frac{dv}{dt} = f = Fg.$$

§. 115. Die beschleunigende Kraft in irgend einem Zeitpunkte der Bewegung eines Körpers wird gemessen durch die Grenze des Quotienten aus der von diesem Punkte an erzeugten Geschwindigkeit und der Zeit, innerhalb welcher sie erzeugt ist.

Wenn die beschleunigende Kraft keine gleichförmige ist, so kann sie nicht mehr durch den Quotienten aus irgend einer Geschwindigkeit und der Zeit, in welcher diese erzeugt wird, gemessen werden. Denn dieser Quotient ändert sich mit der Zeit, während welcher die Kraft gewirkt hat, ebenso wie in §. **106.** der Quotient aus dem Raume und der Zeit veränderlich war, und der Quotient aus der Geschwindigkeit und der Zeit hat ebensowohl eine Grenze, wie der Quotient aus dem Raume und der Zeit, und diese Grenze ist ebenso das Maß der beschleunigenden Kraft für den gegebenen Zeitpunkt, wie die Grenze des in §. **106.** betrachteten Quotienten das Maß der Geschwindigkeit ist. Nimmt man nämlich den Werth des Quotienten aus der erzeugten Geschwindigkeit und der Zeit, in welcher sie erzeugt ist, und nimmt diese Zeit von dem betrachteten Zeitpunkte angerechnet immer kleiner und kleiner, so nähert man sich dem Maße der Kraft für den gegebenen Punkt, und wenn man die letzte Grenze dieses Quotienten nimmt, so erhält man das genaue Maß der Kraft für diesen Zeitpunkt.

Wenn die Geschwindigkeit durch die Kraft vermindert wird, so ist diese eine verzögernde, und es findet noch dasselbe statt.

§. **116.** Lehrsatz. In jeder Bewegung wird die Kraft durch die Geschwindigkeit gemessen, welche in der Zeiteinheit würde hervorgebracht sein, wenn die Kraft von dem betrachteten Zeitpunkte an unverändert geblieben wäre.

Denn wenn die Kraft eine zunehmende ist, so rührt die Zunahme der Geschwindigkeit innerhalb irgend einer von einem gegebenen Zeitpunkte an gerechneten Zeit zum Theil von der in diesem Zeitpunkte schon vorhandenen Kraft und zum Theil von der Zunahme der Kraft nach diesem Zeitpunkte her, und dieser letzte Theil der vergrößerten Geschwindigkeit muss verschwinden, wenn wir blos die Geschwindigkeit in dem gegebenen Zeitpunkte selbst betrachten. Die Kraft wird also ebenso gemessen, als wenn sie von dem gegebenen Zeitpunkte an unveränderlich geblieben wäre, d. h. sie wird durch die Geschwindigkeit gemessen, welche in der gemachten Voraussetzung in der Zeiteinheit erzeugt wird. (S. §. **107.**)

§. 117. Lehrsatz. Wenn f die Kraft, v die Geschwindigkeit und t die Zeit bezeichnet, so ist:

$$f = \frac{dv}{dt}.$$

Denn $\frac{dv}{dt}$ ist die Grenze des Quotienten der gleichzeitigen Zunahmen von v und t, und folglich nach §. 115. gleich der Kraft.

Zusatz 1. Wenn s den Raum bezeichnet, so ist $\frac{ds}{dt} = v$, und folglich nach der vorhergehenden Gleichung:

$$v.\frac{dv}{dt} = f\frac{ds}{dt} \text{ und } \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}.\frac{ds}{dt};$$

folglich wenn man substituirt und den Factor $\frac{ds}{dt}$ auf beiden Seiten wegläßt:

$$v.\frac{dv}{ds} = f.$$

Zusatz 2. Es ist auch: $f = \frac{dv}{dt} = \frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$,

wenn t die unabhängige veränderliche Größe ist.

§. 118. Im Vorhergehenden haben wir gesehen, daß, wenn auf einen in Bewegung befindlichen Körper nach einer von der Richtung seiner Bewegung verschiedenen Richtung eine Kraft wirkt, er keine gerade Linie mehr beschreiben kann, und wir gehen nun zur Betrachtung des Gesetzes über, nach welchem die Wirkung der Kraft in diesem Falle stattfindet; aber zu diesem Zwecke müssen wir zunächst den folgenden Satz aufstellen.

§. 119. Lehrsatz. Wenn zwei Geschwindigkeiten einzeln der Größe und Richtung nach durch zwei zusammenstoßende Seiten eines Parallelogrammes ausgedrückt werden, so wird die aus ihrer Verbindung hervorgehende Geschwindigkeit der Größe und Richtung nach durch die Diagonale des Parallelogrammes ausgedrückt.

Es sei P (Fig. 114.) eine Ebene, z. B. das Verdeck eines Schiffes, welche sich mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit von der Lage PQ zu der Lage pq parallel zu sich selbst bewegt, und es habe in dieser Ebene ein Körper eine gleichförmige Bewegung, vermöge wel-

cher er den Weg BD zurücklegt, während der Punkt B der Ebene sich durch den Raum Bb bewegt.

Wenn man alsdann das Parallelogramm BDbd vollendet, und die Diagonale Bd ziehet, so beschreibt der Körper vermöge der Zusammensetzung der beiden Bewegungen die Diagonale Bd.

Denn wenn B in die Lage b kommt, so kommt BD in die Lage bd und folglich hat sich der Körper von B bis d bewegt. Für irgend eine Zwischenzeit sei BD in die zu ihr parallele Lage $\beta\delta$ gekommen, so verhält sich wegen der Gleichförmigkeit der Bewegungen $\beta\gamma : \beta\delta$ (oder bd) = Zeit in $B\beta$: Zeit in Bb = $B\beta$: Bb. Aber da sich verhält $\beta\gamma$: bd = $B\beta$: Bb, so ist $B\gamma d$ eine gerade Linie, und da sich verhält $B\gamma$: Bd = $B\beta$: Bd = Zeit in $B\beta$: Zeit in Bb, so ist die Bewegung in Bd gleichförmig.

Wir haben hier vorausgesetzt, dass der bewegende Punkt zwei Geschwindigkeiten habe und behalte, nämlich die durch Bb ausgedrückte Geschwindigkeit, weil er mit der Ebene fortbewegt wird, und die Geschwindigkeit BD, mit welcher er sich in dieser Ebene, in Beziehung auf sie allein betrachtet, bewegt.

§. 120. Zweites Bewegungsgesetz. Wenn auf einen in Bewegung befindlichen Körper irgend eine Kraft wirkt, so erfolgt die hervorgebrachte Veränderung der Bewegung in der Richtung dieser Kraft und ist der Größe nach letzterer proportional.

Dieser Satz lässt sich auch folgendermaßen ausdrücken: Wenn irgend eine Kraft auf einen schon in Bewegung befindlichen Körper wirkt, so verbindet sich die Bewegung, welche diese Kraft einem in Ruhe befindlichen Körper ertheilen würde, mit der schon stattfindenden Bewegung des Körpers so, dass beide ihre vollen Wirkungen parallel zu ihren eigenen Richtungen hervorbringen.

Es bewege sich z. B. ein als ein Punkt betrachteter Körper in der Richtung AB (Fig. 115.) mit einer solchen Geschwindigkeit, dass er den Weg AB in 1 Sec. gleichförmig durchläuft, so würde derselbe nach dem ersten Bewegungsgesetze in der nächsten Secunde in derselben geraden Linie den Weg Bb = AB zurücklegen. Aber wenn, sobald der Körper in B angelangt ist, eine Kraft nach der Richtung BM anfängt, auf ihn zu wirken und während 1 Sec. gleichförmig fortwirkt, und der Größe nach durch DM ausgedrückt wird, d. h. den Körper in 1 Sec. durch den Raum BM von der Ruhe aus bewegen würde; so befindet sich der Körper nach Verlauf von 1 Sec., von dem Punkte B angerechnet, in dem Punkte C, für welchen MC und bC resp. gleich und parallel Bb und BM sind.

Wenn der Körper in C angelangt ist, und die Kraft hörte nun auf, auf ihn zu wirken, so würde er fortfahren, sich nach der Richtung und mit der Geschwindigkeit, welche er in C hat, zu bewegen, und es sei Cc der Raum, welchen er alsdann in 1 Sec. beschreiben würde. Aber wenn auf den in C befindlichen Körper eine Kraft anfängt zu wirken, welche ihn vermöge ihrer gleichbleibenden Wirkung in 1 Sec. durch den Raum CN bewegen würde, so befindet sich der Körper nach Verlauf von 1 Sec., von C angerechnet, in dem Punkte D, für welchen DN, Dc resp. gleich und parallel cC und CN sind; u. s. f.

Wenn die Kräfte nicht so beschaffen sind, dass sie während 1 Sec. nicht als der Größe und Richtung nach unveränderlich betrachtet werden können, so muss dieses Bewegungsgesetz auf irgend einen kleinen Zeitraum angewandt werden, für welchen dieses der Fall ist, und wenn endlich die Kräfte stetig veränderlich sind; so muss man, wie wir später sehen werden, die Grenzen von Bb und BM, etc. betrachten.

§. 121. Aus dem zweiten Bewegungsgesetze folgt also, dass, wenn einem Körper, welcher sich mit einem beweglichen Raume fortbewegt, in diesem Raume selbst irgend eine Geschwindigkeit ertheilt wird, die Bewegung desselben in Beziehung auf den beweglichen Raum ganz dieselbe ist, als wenn sich der Körper und der Raum ursprünglich im Ruhe befunden hätten.

Wenn also dieses zweite Bewegungsgesetz richtig ist, so sind alle mechanischen Wirkungen, welche in einem gleichförmig bewegten Raume stattfinden, in Beziehung auf die Theile dieses Raumes dieselben, als wenn sich dieser Raum in Ruhe befände.

Dieses Gesetz wird also dadurch bestätigt, dass wir finden, dass die Bewegungen und Wirkungen der Körper in einem gleichförmig bewegten Raume genau dieselben sind, als wenn sich dieser Raum in Ruhe befände.

Z. B. auf einem in Bewegung befindlichen Schiffe wird eine Kugel durch gleiche Kräfte in gleichen Zeiten auch immer durch gleiche Räume bewegt; die Bewegungen mögen nach den Backen oder nach dem Schwanze zu gerichtet sein; ebenso sind die Wirkungen des gegenseitigen Druckes und Stoßes der Körper in jeder Richtung dieselben. Auch die Bewegungen der Körper auf dem festen Lande sind unter denselben Bedingungen dieselben, sie mögen nach Osten, Westen, Süden oder Norden, oder nach irgend einer andern Richtung stattfinden, obgleich die Bewegung der Erde in einigen dieser Fälle mit der Bewe-

gung der Körper von gleicher oder entgegengesetzter Richtung ist, oder die Richtungen beider Bewegungen sich durchkreuzen. Die Schwingungen des Pendels erfolgen genau in derselben Zeit, sie mögen gegen Osten und Westen oder gegen Norden und Süden stattfinden, und es lässt sich zeigen, dass eine kleine Abweichung von der Genauigkeit des fraglichen Gesetzes bei dem letzten Versuche einen merklichen Unterschied hervorbringen würde.

Es sei P (Fig. 114.) ein Boot, welches sich gleichförmig nach der Richtung Pp bewegt und B eine auf dem Verdecke in Ruhe befindliche Kugel, welche also längs der Richtung der Bewegung des Bootes, dessen Verdeck als horizontal angenommen wird, mit fortbewegt wird. Es sei BD eine auf dem Verdecke gezogene Linie, welche vermöge der Bewegung des Bootes innerhalb irgend einer Zeit in die Lage bd kommt.

In dem Augenblicke, wo sich das Boot in der Lage P und die Kugel in B befindet, werde letztere nach der Richtung BD fortgestoßen. Alsdann findet man, dass sich die Kugel gleichförmig nach der Richtung BD bewegt, so dass, wenn der Punkt B nach b kommt, sich die Kugel in irgend einem Punkte von bd befindet, und sich folglich in Beziehung auf das Boot in der Richtung BD bewegt. Da sich nun die Kugel, wenn ihr kein Stoß ertheilt wird, von B nach b bewegt haben würde, und sie sich am Ende derselben Zeit in d befindet; so ist klar, dass sich durch die Wirkung des Stoßes die nach bd gerichtete Bewegung mit der nach Bb gerichteten zusammengesetzt hat, was mit dem zweiten Bewegungsgesetze übereinstimmt.

Dagegen sei BK (Fig. 115.) der Mast eines Schiffes, welcher sich vermöge der Bewegung des Schiffes nach Verlauf von 1 Sec. in der Lage bk befindet. Wenn sich der Mast in der Lage BK befindet, so wollen wir annehmen, dass von B ein Körper frei herabfällt, und es sei BM der Raum, durch welchen der Körper von der Ruhe aus in 1 Sec. fällt; so findet man durch den Versuch, dass der Körper nach Verlauf von 1 Sec. an dem Mastbaume um den Raum bC = BM herabgefallen ist.

Nun hat aber der Körper in B die Geschwindigkeit Bb, und zugleich wirkt eine Kraft auf ihn, vermöge welcher er sich durch den Raum BM bewegt, und es ist einleuchtend, dass sich diese Bewegungen so zusammengesetzt haben, dass BMCb ein Parallelogramm ist, wie es nach dem ausgesprochenen Gesetze sein muss.

Es ist einleuchtend, dass sich nach diesem zweiten Bewegungsgesetze alle Bewegungen so mit einander verbinden, als wenn sie keine

Störung auf einander ausübten, indem jede ihrer Seits dieselbe bleibt, als wenn keine andern Bewegungen weiter vorhanden wären.

Wenn dieses Bewegungsgesetz nicht wahr wäre, so könnten Körper, welche auf einer in Bewegung befindlichen Horizontalebene durch einen Stoß nach einer gegebenen Richtung fortbewegt werden, sich in Beziehung auf die Ebene nur dann nach der Richtung des Stoßes bewegen, wenn diese Richtung mit der Bewegung der Ebene übereinstimmte. Wenn also ein Körper durch einen Stoß nach der Richtung von Norden nach Süden in Bewegung gesetzt wird, so könnte er sich wegen der Drehung der Erde um ihre Axe nicht nach dieser Richtung bewegen, sondern müsste nach Osten oder Westen davon abweichen. Ebenso müssten die Schwingungen eines Pendels in verschiedenen Zeiten gemacht werden, je nachdem es in einer von Süden nach Norden, oder in einer von Osten nach Westen gehenden Ebene schwingt; und ebenso in andern Fällen. Außer der Rotationsbewegung der Erde um ihre Axe, welche sich mit allen auf der Oberfläche der Erde stattfindenden Bewegungen nach dem zweiten Bewegungsgesetze verbindet, verbindet sich damit auch die noch weit größere Bewegung der Erde um die Sonne, und wenn das ganze Sonnensystem eine Bewegung hat, so verbindet sich auch diese damit.

§. **122.** Wir gehen nun zu den Prinzipien über, welche die Bewegungen der Körper beherrschen, wenn die Quantität ihrer Masse in Betracht gezogen wird.

Erklärung. Das **Moment** eines Körpers ist das Product aus den Zahlen, welche die Quantität seiner Masse und seine Geschwindigkeit ausdrücken.

Erklärung. Die bewegende Kraft wird gemessen durch das Moment, welches durch die directe Wirkung einer Kraft in einer gegebenen Zeit erzeugt wird.

Die Wirkung einer Kraft heißt direct, wenn ihre Richtung durch den Körper geht, worauf sie wirkt.

§. **123.** Drittes Bewegungsgesetz. Wenn Druckkräfte direct Bewegung mittheilen, so verhält sich die bewegende Kraft wie der Druck.

Die alltägliche und allgemeine Erfahrung lehrt uns, dass, wenn wir einen Körper durch eine Druckkraft, z. B. durch einen Stoß bewegen, die Bewegung zunimmt, wenn der Druck zunimmt, und zugleich ist klar, dass für eine gegebene Druckkraft die Bewegung desto geringer ist, je größer die zu bewegende Masse ist; aber es fragt sich nun, nach welchem genauen Gesetze die mitgetheilte Geschwindigkeit von dem Drucke und der Quantität der Materie abhängt.

Wenn ein Körper auf einen andern einen Druck ausübt, so erleidet er einen gleichen und entgegengesetzten Druck; denn die Rückwirkung ist der Wirkung gleich und entgegengesetzt. Wenn also ein Körper B auf einen Körper A einen Druck ausübt, und denselben beschleunigt, so wird der Körper B durch einen gleichen und entgegengesetzten Druck von A verzögert. Wenn der Körper A auf einer vollkommen polirten horizontalen Ebene liegt, und der mit A durch eine Schnur verbundene Körper B an der Seite der Ebene frei herabhängt, so hat der Körper B ein Bestreben, zu fallen und zieht den Körper A auf der horizontalen Ebene fort, wobei wir voraussetzen, dass der Körper A so klein ist, dass die Schnur als zu der Ebene parallel betrachtet werden kann. Der Körper B beschleunigt also A und A verzögert B vermöge eines Druckes, welcher der Spannung der Schnur gleich ist.

Wenn das Moment, welches der Körper B dem Körper A mittheilt, das gewonnene Moment und die Größe, um welche das Moment von B kleiner ist, als wenn B nicht mit A verbunden wäre, das verlorene Moment genannt wird; ist in allen solchen Fällen das in irgend einer Zeit gewonnene und verlorane Moment gleich groß. Wenn z. B. A = **3** Pfd. und B = **1** Pfd. ist, so wird in einer Secunde eine Geschwindigkeit von 8 Fuß erzeugt. Aber wenn B frei herabgefallen wäre, so würde es in einer Secunde die Geschwindigkeit von **32** Fuß erlangt haben; folglich ist das von A gewonnene Moment $= 8 \times 3$ und das von B verlorene Moment $= 32 \times 1 - 8 \times 1$; also beide einander gleich. Wenn A wieder = **3** Pfd. und B auch = **3** Pfd. wäre, so wäre die in einer Secunde erlangte Geschwindigkeit = **16** Fuß; folglich das gewonnene und verlorene Moment resp. $= 16 \times 3$ und $= 32 \times 3 - 16 \times 3$; also beide einander gleich. In diesem Falle ist die Geschwindigkeit nur verdoppelt, obgleich das bewegende Gewicht B verdreifacht ist, weil der Körper B sowohl sich selbst als A zu bewegen hat, wozu ein Theil seines Gewichtes angewandt wird. Aber da das in derselben Zeit gewonnene und verlorene Moment gleich groß ist, so ist die bewegende Kraft, welche A beschleunigt, und die bewegende Kraft, welche B verzögert, nach der obigen Definition gleich groß. Nun ist aber die Druckkraft, welche A beschleunigt, so groß als die, welche B verzögert, weil sie nichts anders als Wirkung und Rückwirkung sind, und folglich ist die bewegende Kraft dieselbe, so lange die Druckkraft, welche Bewegung erzeugt oder aufhebt, dieselbe bleibt.

§. **124.** Ferner, da zwei gleiche Druckkräfte, welche während derselben Zeit wirken, gleichen Körpern gleiche Geschwindigkeiten ertheilen,

so kann man annehmen, dass sich beide Körper mit einander vereinigen und die Druckkräfte in eine einzige zusammengesetzt werden. Eine doppelte Druckkraft bringt also auch ein doppeltes Moment hervor, und man sieht leicht ein, dass dasselbe für jedes beliebige andere Vielfache gilt. Wenn also der Druck in irgend einem Verhältnisse zunimmt, so nimmt das in einer gegebenen Zeit erzeugte Moment, und folglich auch die bewegende Kraft in demselben Verhältnisse zu.

Die bewegende Kraft verhält sich also in solchen Fällen, wie die Druckkraft.

Da wegen der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung zwischen zwei Körpern das gewonnene und verlorene Moment immer einander gleich sind, so nennt man das gewonnene und verlorene Moment, zuweilen Wirkung und Rückwirkung, und drückt das dritte Bewegungsgesetz dadurch aus, dass man sagt: Bei der Mittheilung der Bewegung ist die Rückwirkung der Wirkung gleich und entgegengesetzt.

§. 125. Wenn Versuche der eben erwähnten Art mit gehöriger Genauigkeit angestellt werden könnten, so würde dadurch der betrachtete Satz dargethan. Statt wie vorhin den Körper A als auf einer horizontalen Ebene ruhend anzunehmen, können wir uns vorstellen, dass A und B an einer über eine Rolle gehenden Schnur (Fig. 116.) hängen, in welchem Falle offenbar blos der Massenüberschuss von B über den von A Bewegung hervorbringen kann. Die von Atwood erfundene Maschine eignet sich sehr gut dazu, die Größen der Geschwindigkeiten zu vermindern, so dass man sie leichter messen kann, und die mit dieser Maschine angestellten Versuche stimmen mit diesem Gesetze überein.*)

Wenn wir einem Körper A durch den Druck der Hand oder einer Feder Bewegung mittheilen, wie wir vorhin annahmen, so würde sich das in Rede stehende Gesetz nicht so leicht durch Versuche erläu-

*) Um die bei einer solchen Maschine beobachteten Geschwindigkeiten mit den aus dem dritten Bewegungsgesetze abgeleiteten Resultaten zu vergleichen, muss die Rotationsträgheit der Maschine in Betracht gezogen werden, welche nach Prinzipien berechnet wird, die ebenfalls von dem dritten Bewegungsgesetze abhängen.

Auch wird hier angenommen, dass die Schwere, deren Wirkung auf den Körper B den Druck und folglich die Bewegung hervorbringt, mit derselben Intensität wirkt, mit welcher Geschwindigkeit sich B auch bewegen mag, was später (Cap. III.) bewiesen werden wird.

Das Resultat aus Smeatons Versuchen ist, dass, wenn Druck- oder Gewichtskräfte Geschwindigkeiten einer gegebenen Masse erzeugen, sich die in einer gegebenen Zeit erzeugte Geschwindigkeit wie die Druckkraft verhält, wenn der mechanische Vortheil, unter welchem die Druckkraft wirkt, in Betracht gezogen wird.

tern lassen; denn bei dem Drucke der Hand ist es durchaus unmöglich, zu wissen, ob in zwei Fällen die Stärke des Druckes genau dieselbe ist, und noch weniger würde man das Verhältniss dieses Druckes bestimmen können, wenn er verschieden wäre. Bei einer Feder lässt sich dieses Verhältniss dadurch angeben, dass man die Gewichte bestimmt, welche der Feder eine gegebene Krümmung ertheilen; aber in beiden Fällen ist der Druck nicht gleichförmig, weil er beständig abnimmt, da der Körper, worauf er wirkt, nachgiebt und zurückweicht und ein Theil der Kraft, dessen Größe sich nicht leicht bestimmen lässt, wird in dem einen Falle zur Bewegung der Hand und in dem andern zu der Bewegung der Feder verwandt.

§. **126.** Lehrsatz. Die beschleunigende Kraft verhält sich direct wie der Druck und umgekehrt wie die Quantität der Materie.

Dieses folgt aus §. **124.**; denn die beschleunigende Kraft verhält sich wie die in einer gegebenen Zeit hervorgebrachte Geschwindigkeit.

Beispiel 1. Die bewegende Kraft eines Körpers P zu finden, wenn er unter der Wirkung der Schwere frei herabfällt.

Es sei g die von der Schwere in der Zeiteinheit erzeugte Geschwindigkeit, so drückt g nach §. **116.** die beschleunigende Kraft von P aus und die bewegende Kraft wird durch das Product aus der beschleunigenden Kraft und der Quantität der Materie des Körpers ausgedrückt. Folglich ist die bewegende Kraft $= Pg$.

Beispiel 2. Die beschleunigende Kraft zu finden, wenn zwei gleiche an einer über eine Rolle gehenden Schnur hängende Gewichte A, B (Fig. **116.**) durch das Gewicht eines Körpers P in Bewegung gesetzt werden.

Wenn ein Körper vermöge der Wirkung der Schwere frei herabfällt, so ist seine beschleunigende Kraft $= g$. In diesem Falle ist die Druckkraft, welche die Bewegung hervorbringt, das Gewicht des Körpers und die bewegte Quantität der Materie die Masse des Körpers selbst.

Wenn der Körper P die Bewegung von P, A und B bewirkt, so ist das Gewicht von P allein die Druckkraft, welche Bewegung erzeugt; denn A und B halten einander vermöge ihres gleichen und nach entgegengesetztem Sinne gerichteten Druckes das Gleichgewicht. Ferner ist in diesem Falle die bewegte Masse die Summe der Massen P, A und B, welche sich alle mit derselben Geschwindigkeit bewegen, d. h. so, wie wenn sie nur eine Masse bildeten, gleich.*) Also ist die bewegte

*) Wenn wir annehmen, dass die Schnur AE statt über die Rolle E zu gehen, in geradliniger Richtung fortgeht, und $B' = B$ an der Schnur befestigt ist,

Masse $= P + A + B = P + 2A$ und mithin verhält sich die beschleunigende Kraft in Fig. **116.** zu der beschleunigenden Kraft von P beim freien Falle, d. h. zu g, wie sich der Quotient aus dem Drucke und der bewegten Masse im ersten Falle, zu dem Quotienten aus dem Drucke und der bewegten Masse im zweiten Falle verhält, d. h. beide verhalten sich wie $\frac{P}{P+2A} : \frac{P}{P}$ oder 1,

und folglich ist die beschleunigende Kraft in Fig. **116.** gleich $\frac{Pg}{P+2A}$.

Beispiel 3. Die Geschwindigkeit einer Flintenkugel von **1** Unze Gewicht beträgt **1000** Fuß in der Secunde; die bewegende Kraft derselben zu finden, wenn die Kugel die Länge des Flintenlaufes in $\frac{1}{10}$ Secunde durchläuft und die Kraft gleichförmig ist.

Da die in $\frac{1}{10}$ Secunde erzeugte Geschwindigkeit **1000** Fuß beträgt, wenn die Kraft gleichförmig wirkt, so beträgt die in **1** Secunde erzeugte Geschwindigkeit **10000** Fuß. Folglich verhält sich die bewegende Kraft zu der Gewichtskraft von **1** Unze wie **10000**:g, und wenn $g = 32\frac{1}{5}$ engl. Fuß gesetzt wird, so ist die bewegende Kraft der eines Gewichtes von $\frac{10000}{32\frac{1}{5}} = 310$ Unzen gleich.

Aus dem ersten Beispiele erhellet, dass die bewegende Kraft eines Gewichtes $P = Pg$ ist. In der Statik wird ein Gewicht P durch die Quantität P der Materie ausgedrückt; aber in der Dynamik muss auch die Schwerkraft g in Betracht gezogen werden, und Pg drückt die bewegende Kraft des Gewichtes P aus.

§. **127.** Erklärung. Die Trägheit eines Körpers ist seine als Widerstand der Mittheilung der Bewegung betrachtete Quantität von Materie.

Wenn eine Kraft Pg eine Masse A in Bewegung setzt, so ist die beschleunigende Kraft $= \frac{Pg}{A}$, und folglich ist die in einer gegebenen Zeit erzeugte Geschwindigkeit der Größe $\frac{Pg}{A}$ proportional. Je grö-

---

ferner, dass auf A und B′ die Schwere nicht wirkt, so dass sie kein Bestreben haben, sich zu bewegen und blos durch den Druck von P in Bewegung gesetzt werden; so findet offenbar derselbe Fall wie der im Texte angeführte statt, weil es gleichgültig ist, ob A und B′ in Ruhe bleiben, weil die Schwere nicht darauf wirkt, oder ob ihre Gewichte einander das Gleichgewicht halten. Aber in dem hier angenommenen Falle ist klar, dass die Bewegung in A, P und B′ so hervorgebracht wird, als wenn sie eine Masse in A bildeten, woraus die Richtgikeit des obigen Schlusses erhellet.

ßer also A ist, desto kleiner ist die erzeugte Geschwindigkeit, und deswegen wird A zuweilen als Maß des Widerstandes der Bewegung des Körpers betrachtet und seine Trägheit genannt.

Aus dem eben Gesagten erhellet, dass in diesem Ausdrucke eher ein Gesetz der Bewegung als eine Eigenschaft der Materie liegt.

§. 128. Außer dem Drucke ist auch der Stoß oder Anstoß eine Wirkungsart der Körper auf einander, und die Bewegungsgesetze sind auch auf diesen Fall anwendbar.

Lehrsatz. Der Stoß ist in der Wirklichkeit ein Druck von sehr kurzer Dauer.

Alle Körper sind einer mehr oder weniger beträchtlichen Formveränderung fähig, und diese Formveränderung scheint in einer unendlich kleinen Zeit zu erfolgen, wenn die Körper durch Stoß ihre Bewegungen verändern. Wenn z. B. eine in Bewegung befindliche Elfenbeinkugel auf eine andere in Ruhe befindliche stößt, so scheinen sie sich gleich nach ihrer gegenseitigen Berührung von einander zu trennen, und die zweite scheint augenblicklich eine gewisse endliche Geschwindigkeit bekommen zu haben. Ebenso, wenn sich die beiden aneinanderstoßenden Kugeln nach dem Stoße nicht von einander trennen, indem sie entweder nicht elastisch sind, wie Kugeln aus Blei oder Thon, oder an einander adhäriren, sobald sie in Bewegung kommen; so scheint die Geschwindigkeitsveränderung, welche durch den Stoß bewirkt wird, ebenfalls augenblicklich stattzufinden. Allein in allen diesen Fällen erfolgt die Veränderung zwar sehr schnell, aber die Mittheilung der Bewegung geschieht immer graduell und die Geschwindigkeit des in Ruhe befindlichen Körprs entsteht immer nach unmerklich kleinen Zuwächsen, wenn er in Bewegung gesetzt wird. Sobald die eine Kugel mit der andern in Berührung kommt, werden ihre Oberflächen gegen einander gedrückt, und die Bewegung wird durch diesen Druck der in Ruhe befindlichen Kugel mitgetheilt. Die Formveränderung nimmt so lange zu, als die anstoßende Kugel ein Bestreben hat, sich schneller zu bewegen wie die andere, und dauert während dieser ganzen Zeit fort, indem die eine Kugel an Geschwindigkeit gewinnt, und die andere daran verliert. Wenn diese Wirkung aufhört, so bewegen sich die beiden Körper, wenn sie unelastisch sind, mit einander fort, und wenn sie elastisch sind, so trennen sie sich vermöge der Wirkung ihrer Elasticität von einander, nehmen ihre Kugelgestalt wieder an und es findet eine abermalige Geschwindigkeitsveränderung in Folge des Druckes, welchen sie auf einander ausüben, statt.

Dass diese Formveränderung bei dem Stoße stattfindet, erhellet aus einem Versuche mit weichen Körpern, welche ihre ursprüngliche Form

nicht wieder annehmen, und kann auch mit elastischen Kugeln gezeigt werden, wenn man die eine mit einer Substanz, z. B. mit Dinte, überzieht, welche auf den Theilen der andern Kugel sitzen bleibt, die mit der ersten in Berührung gekommen sind. Der auf diese Weise hervorgebrachte Fleck hat eine endliche Größe, was nicht der Fall sein könnte, wenn die Körper bei dem Stoße ihre Kugelgestalt beibehalten hätten, und zwar ist dieser Fleck desto größer, je größer die Kraft des Stoßes ist.

Dass die Mittheilung der Bewegung allmählig geschieht, erhellet auch daraus, dass die Wirkung von derselben Art ist, die Körper, welche bei dem Stoße die Formveränderung erleiden, mögen leicht oder schwer zusammendrückbar sein. Aber in dem Falle, wo die Form des Körpers leicht verändert werden kann, z. B. bei einer mit Luft gefüllten Blase, ist es in die Augen fallend, dass jede durch Anstoß hervorgebrachte Bewegung allmählig erzeugt wird, und dass zur Veränderung und Wiederherstellung der Form eine endliche Zeit erfordert wird. Es findet also dasselbe auch in den übrigen Fällen statt, wo die Größe und Formveränderung der Körper verschieden sind.

§. **129.** Lehrsatz. Das dritte Bewegungsgesetz ist auch auf den Fall des Stoßes der Körper anwendbar.

Der Stoß ist, wie wir gesehen haben, ein während einer kurzen Zeit fortdauernder Druck, welcher von Null bis zu einer endlichen Größe zunimmt, und dann wieder bis zu Null abnimmt. Wenn also das dritte Bewegungsgesetz für Druckkräfte gilt, so gilt es auch für den Stoß. Hieraus sieht man leicht, dass durch die Wirkungen des Stoßes Geschwindigkeit erzeugt und folglich auch aufgehoben wird; denn dieselbe Kraft, welche eine Geschwindigkeit hervorbringt, muss auch, in entgegengesetzter Richtung angebracht, sie aufheben. Wenn nun aber zwei Körper gegeneinander stoßen, so muss der von der Berührung ihrer Oberflächen herrührende und auf beide ausgeübte Druck gleich und von entgegengesetzter Richtung sein, und folglich müssen die Momente, welche durch den Stoß in jedem Körper erzeugt und mithin auch aufgehoben werden, einander gleich sein. Hieraus ist klar, dass wenn sich zwei Körper mit gleichen Momenten nach entgegengesetzten Richtungen bewegen, an einander stoßen und nach dem Stoße sich nicht von einander trennen, ihre Geschwindigkeiten durch den Stoß aufgehoben werden, und die ganze Masse in Ruhe bleibt, was auch mit der Erfahrung übereinstimmt.

§. **130.** Die folgende Betrachtung soll dazu dienen, dass das oben erörterte dritte Bewegungsgesetz, obgleich es sich nicht a priori beweisen lässt, doch den einfachsten Voraussetzungen entspricht.

Es seien A, B (Fig. 118.) zwei unelastische Körper, welche sich mit Geschwindigkeiten gegen einander bewegen, die sich umgekehrt wie ihre Massen verhalten. Wenn der Punkt C so genommen wird, dass sich verhält A:B = BC:CA, so ist C der Schwerpunkt der beiden Körper, und wir wollen annehmen, dass sie vermöge ihrer Bewegungen nach Verlauf einer gewissen Zeit in die Lagen a, b gekommen sind. Da sich ihre Geschwindigkeiten umgekehrt wie ihre Massen verhalten, so verhält sich auch A:B = Bb:Aa, und aus dieser und der vorhergehenden Proportion folgt A:B = bC:aC; folglich bleibt C stets der Schwerpunkt der beiden Körper. Hieraus erhellet, dass während der ganzen Zeit der gegenseitigen Annäherung der beiden Körper ihr Schwerpunkt in Ruhe bleibt; aber wenn sich ihre Bewegungen einander nicht gegenseitig aufheben, so bewegen sie sich nach dem Stoße mit einander und folglich bewegt sich ihr Schwerpunkt auch. Wenn also das dritte Bewegungsgesetz nicht wahr wäre, so würde folgen, dass sich der Schwerpunkt der beiden Körper während ihrer einzelnen Bewegungen nicht bewegt; aber sobald der Stoß stattfindet, sich anfängt zu bewegen. Allein es ist einfacher und daher auch wahrscheinlicher, anzunehmen, dass der Schwerpunk stets in Ruhe bleibt, d. h. dass das dritte Bewegungsgesetz wahr ist.

Dieselben Schlüsse sind auch in den Fällen fortwährend wirkender Druckkräfte anwendbar. Es seien z. B. A und B ein Boot und ein Schiff auf dem Wasser und eine auf einem von beiden Fahrzeugen befindliche Person ziehe das andere vermittelst des Seiles AB an sich, so ist die auf jedes ausgeübte Zugkraft dieselbe, nämlich der Spannung des Seiles gleich, und folglich verhalten sich die ihnen ertheilten Geschwindigkeiten umgekehrt wie ihre Massen, in welchem Falle der Schwerpunkt beider Körper während der ganzen Zeit ihrer gegenseitigen Annäherung in Ruhe bleibt, und beide in diesem Punkte zusammenstoßen.

Dieses ist die natürlichste Voraussetzung; denn wenn man annimmt, dass die Spannung nach dem Zusammentreffen noch fortdauert, so ist klar, dass der Schwerpunkt in Ruhe bleiben muss, weil diese Spannung nur eine statische Wirkung und Rückwirkung hervorbringt, welche einander das Gleichgewicht halten.

Das Vorhergehende ist auch auf gegenseitige Anziehungen der Körper anwendbar; denn es seien z. B. A, B zwei Körper, wie ein Magnet und ein Stück Eisen, welche sich ungehindert einander nähern können,*) so wirkt ihre gegenseitige Anziehung genau ebenso, wie die

*) Dieser Versuch kann dadurch angestellt werden, dass man den Magnet und

Spannung einer Schnur; vermittelst welcher der eine Körper gegen den andern gezogen wird. Die aus der gegenseitigen Anziehung beider Körper entspringenden und auf sie ausgeübten Druckkräfte sind also einander gleich, und folglich verhalten sich die Geschwindigkeiten der beiden Körper umgekehrt wie ihre Massen. Während sie sich gegenseitig nähern, bleibt also ihr Schwerpunkt in Ruhe, und sie selbst stoßen in diesem Punkte zusammen, was mit der Erfahrung übereinstimmt.

§. **131.** Die Bewegungen der Körper werden also unter allen Umständen nach dem dritten Bewegungsgesetze regulirt; um aber allgemeine Folgerungen daraus zu ziehen, muss es noch von dem bisher betrachteten Falle, in welchem die Wirkung direkt stattfindet, auf die Fälle erstreckt werden, in welchen die Wirkung indirekt ist.

Wenn z. B. ein Gewicht W (Fig. 99.) gewisse Körper m, n, p vermittelst der Schnur B F in Bewegung setzt, so wird die Wirkung des Gewichtes nicht jedem dieser Körper direct mitgetheilt; denn die Kraft drehet das ganze System um eine feste Axe A C und die Körper m, n, p drehen sich als Theile des Systems, und der Druck, welcher in diesem Falle die Bewegung hervorbringt, wird z. B. von F nach m vermittelst des Hebels fortgepflanzt, dessen Arme c F und c m sind.

Verallgemeinertes drittes Bewegungsgesetz. Wenn Druckkräfte, die durch irgend ein materielles System fortgepflanzt werden, Bewegung hervorbringen; so ist die bewegende Kraft der Druckkraft proportional.

Das dritte Bewegungsgesetz, wie es im Vorhergehenden auseinander gesetzt ist, behauptet, dass sich die bewegende Kraft wie die Druckkraft verhält, wenn letztere direct auf die Körper wirkt, und es wird jetzt behauptet, das dasselbe Gesetz auch bei einer indirec-

---

das Stück Eisen auf Korkholz befestigt und dann auf Wasser setzt. Zuweilen wird auch folgende Betrachtung als eine Bestätigung des dritten Bewegungsgesetzes angeführt.

Wir haben nämlich in §. 43. gesehen, dass, wenn zwei Körper A, B einander an irgend einer Maschine, z. B. an dem geradlinigen Hebel, das Gleichgewicht halten, und angenommeu wird, dass sie sich durch sehr kleine Räume bewegen, ihre Geschwindigkeiten sich umgekehrt wie ihre Massen verhalten. Wenn also die Geschwindigkeiten zweier an einer Maschine wirkenden Kräfte sich umgekehrt wie ihre Massen verhalten, so erhalten sie einander in Ruhe, und es wird als der Gleichförmigkeit der Natur am meisten entsprechend betrachtet, dass, wenn die Körper mit Geschwindigkeiten an einander stoßen, die sich umgekehrt wie ihre Massen verhalten, beide in Ruhe bleiben nach dem Stoße. Dieses ist fast dieselbe Erläuterung wie die eine im Texte angegebene, und wie diese nur eine Analogie und kein Beweis.

ten Wirkung der Druckkraft auf den Körper vermittelst irgend einer Maschine oder materiellen Verbindung anwendbar ist, und dass die bewegende Kraft für jeden Körper stets durch das in einer gegebenen Zeit, z. B. in einer Secunde, erzeugte Moment gemessen wird.

Der Beweis des Gesetzes in diesem Falle muss von derselben Natur sein, als der für den Fall der directen Wirkung. Zunächst ist dieses das einfachste Gesetz, welches wir uns denken können; denn wenn zwei gleiche Druckkräfte, welche vereint in gleicher Weise wirken, nicht ein doppeltes Moment hervorbrächten, so würde folgen, dass die Wirkung der zweiten Druckkraft eine andere sein würde, wenn sie allein wirkt, als wenn sie sich mit irgend einer andern Druckkraft verbindet, und wenn dem so wäre, so müsste es außer den andern Bewegungsgesetzen noch ein Gesetz geben, welches diesen Unterschied bestimmte. Da nun aber, wenn die doppelte Druckkraft ein doppeltes Moment erzeugt, jede Druckkraft dieselbe Wirkung hervorbringt, als wenn sie unabhängig von den übrigen wirkte; so ist bei dieser Annahme kein neues Bewegungsgesetz erforderlich. Zweitens findet bei den gewöhnlichen Erscheinungen ein solcher Unterschied offenbar nicht statt, und es können z. B. zwei Menschen ein Rad fast doppelt so schnell drehen, als einer, wenn man die bei der größern Geschwindigkeit zur schnellen Bewegung ihrer Arme erforderliche größere Kraft in Betracht zieht. Ein sehr kleines Uebergewicht an einer Maschine bringt auch eine sehr kleine Geschwindigkeit hervor; je größer ersteres wird, desto größer wird auch letztere und ein sehr großes Uebergewicht bringt eine Geschwindigkeit hervor, welche sich der des freien Falles des Gewichtes sehr nähert. Auch gibt es keine gewöhnlichen und allgemeinen Erscheinungen, welche der Annahme zuwiderliefen, dass sich die einer gegebenen Masse in einer gegebenen Zeit mitgetheilte Geschwindigkeit wie die erzeugende Druckkraft verhält. Wenn also diese Behauptung nicht genau wahr wäre, so müsste sich ihre Unrichtigkeit durch genaue Versuche nachweisen lassen. Drittens findet man im Gegentheil, dass bei solchen Versuchen die Resultate mit denen übereinstimmen, welche sich aus dem als richtig angenommenen verallgemeinerten dritten Bewegungsgesetze durch Rechnung ergeben. Die in §. 125. als Beweise des dritten Bewegungsgesetzes angeführten Versuche von Atwood und Smeaton sind in der That Beispiele, worin die Wirkung von Gewichtskräften vermittelst einer gewissen Maschinerie fortgepflanzt wird, und sie beweisen daher das dritte Bewegungsgesetz in dem hier betrachteten, erweiterten Sinne. Fernere Anwendungen des auf den Fall indirecter Wirkung ausgedehnten dritten Bewegungsgesetzes werden in dem folgenden Kapitel vorkommen.

§. 132. Die vorhergehenden Bewegungsgesetze sind, wie wir sehen werden, die alleinigen und einfachsten Prinzipien, auf welche sich mechanische Erschinungen zurückführen lassen, und aus dem Vorhergehenden erhellet, dass diese Gesetze von den für sich klaren Beziehungen zwischen Ursache und Wirkung, so wie zwischen Wirkung und Rückwirkung abhängen, welche wir aber nur durch die Erfahrung und nicht a priori kennen, weil keine Erfahrung ohne die Ueberzeugung von der Richtigkeit dieser Beziehungen möglich ist. Um aber aus diesen Grundwahrheiten die Bewegungsgesetze abzuleiten, ist die Erfahrung, in einem mehr speciellen Sinne genommen, nothwendig, damit wir unsere Fundamentalbegriffe ausdeuten und anwenden können.

Es ist also ein Theil jedes Gesetzes nothwendig wahr, während ein Theil bewiesen wird, oder aus der Erfahrung, d. h. durch aufmerksame Beobachtung der Erscheinungen sich ergibt.

Die Natur der Wahrheit der Bewegungsgesetze wird vielleicht etwas klarer, wenn wir die Zerlegung jedes Gesetzes in den nothwendigen und empirischen Theil seiner Wahrheit in einer tabellarischen Uebersicht angeben.

Nothwendiger Theil.	Empirischer Theil.
Erstes Gesetz. Die Geschwindigkeit verändert sich nicht ohne eine Ursache.	Die Zeit, während welcher ein Körper bereits in Bewegung ist, ist keine Ursache der Geschwindigkeitsveränderung.
Zweites Gesetz. Die Größe einer beschleunigenden Kraft wird durch die hervorgebrachte Beschleunigung gemessen.	Die Geschwindigkeit und Richtung der bereits existirenden Bewegung eines Körpers sind keine Ursachen, welche die hervorgebrachte Beschleunigung verändern.
Drittes Gesetz. Die Wirkung ist der Rückwirkung gleich und entgegengesetzt.	Der feste Zusammenhang der Theile eines Körpers oder eines Systemes von Körpern und die auf diesen Körper, oder dieses System bereits ausgeübten Wirkungen sind keine Ursachen, welche die Wirkungen einer neu hinzugekommenen Kraft verändern.

Wenn wir also behaupten, dass durch die Verbindung der Theile eines Systems die Wirkung einer Kraft auf dasselbe nicht geändert wird, so verstehen wir darunter nur, dass dadurch keine neue Veränderungsursache eingeführt wird; aber die Wirkung selbst bleibt noch nach den vorhergehenden Regeln des Gleichgewichtes und der Bewegung zu bestimmen. Die Verbindung der Theile des Systems modi-

ficirt die Anwendung dieser Regeln; aber es wird dadurch keine neue Regel nothwendig gemacht, und dieselbe Bemerkung ist auf alle oben erwähnten Erfahrungssätze anwendbar.

Hiernach ist leicht einzusehen, dass der Theil jedes Gesetzes, welcher hier als empirisch genannt ist, aus einer Negation der Voraussetzung, dass die Bedingung des bewegenden Körpers in Beziehung auf seine Bewegung und Wirkung eine Ursache irgend einer Veränderung in den Umständen seiner Bewegung ist, und hieraus folgt, dass die Umstände vollständig bestimmt sind durch die äußern auf den Körper wirkenden Kräfte.

Später werden wir noch auf mehrere Sätze kommen, welche mechanische Prinzipien genannt worden sind, und wovon man einige als elementare betrachtet hat. Manche derselben sind sowohl wegen ihrer Merkwürdigkeit, wie als zweckmäßige Hülfsmittel bei der Auflösung ausgebreiteter und schwieriger Arten von Aufgaben sehr werthvoll; aber wenn man sie genau betrachtet und untersucht, so sind sie, insoweit sie wahr sind, nur Folgerungen und Verbindungen aus den drei vorhergehenden Bewegungsgesetzen.

Zweites Kapitel.

Gleichförmige Bewegung und Anstoß.

§. **133.** Wenn zwei in Bewegung befindliche Körper, auf die keine äußern Kräfte wirken, gegen einander stoßen und sich nach dem Stoße zusammen oder getrennt fortbewegen, so ist die Bewegung eines jeden vor und nach dem Stoße nach dem ersten Bewegungsgesetze eine gleichförmige und geradlinige, und die Veränderung, welche in Folge des Zusammenstoßens stattfindet, ist, wie wir später sehen werden, von dem dritten Bewegungsgesetze abhängig. Dieses ist in gewisser Beziehung der einfachste Fall einer dynamischen Wirkung; denn wir haben von jedem Körper in Beziehung auf die Geschwindigkeit und Richtung nur zwei Zustände, nämlich den vor und den nach dem Anstoße, und nicht, wie in den meisten andern Fällen, eine fortwährende und stetige Veränderung der Geschwindigkeit, oder einen krummlinigen Weg des Körpers zu betrachten. Die Veränderung, welche durch das Zusammenstoßen von Körpern hervorgebracht wird, wird als plötzlich und augenblicklich erfolgend angenommen, so dass zwischen ihrer Bedingung vor und nach dem Anstoße keine zwischenliegende zu betrachten erforderlich ist.

Es erfolgen zwar die Veränderungen, welche durch den Anstoß in den Bewegungen der Körper hervorgebracht werden, wie bereits

früher bemerkt, nicht augenblicklich, sondern innerhalb einer endlichen Zeit, so dass die Geschwindigkeit successive und nicht plötzlich zu- oder abnimmt, und ein Körper nicht von einem Bewegungszustande in einen andern übergehen kann, ohne alle zwischenliegenden zu durchlaufen; aber in den Fällen, auf welche wir unsere Schlüsse anwenden, ist die zu dieser Veränderung erforderliche Zeit, d. h. während welcher zwei zusammenstoßende Körper mit einander in Berührung bleiben, so klein, dass sie unberücksichtigt bleiben kann, und dass wir blos den vorhergehenden und nachfolgenden Zustand zu betrachten brauchen. Die beiden Körper üben jedoch während ihrer gegenseitigen Einwirkung einen gewissen Druck auf einander aus, welcher nach dem dritten Bewegungsgesetze Geschwindigkeit erzeugt und aufhebt.

§. **134.** Wenn die Körper eine merkliche Größe haben, und nicht, wie wir bisher vorausgesetzt haben, blos materielle Punkte sind, so können sie durch ihre Schwerpunkte vertreten werden, und ihr Weg ist die von diesem Punkte beschriebene Linie. Die Körper werden im Allgemeinen als homogen und von sphärischen, oder wenigstens solchen convexen Oberflächen begrenzt vorausgesetzt, dass ihre Berührung nur in einem Punkte stattfindet. Die in diesem Berührungspunkte stattfindende Wirkung erfolgt nothwendig nach der geraden Linie, welche durch diesen Punkt geht und auf den sich darin berührenden Oberflächen senkrecht ist, und wir nehmen an, dass diese Linie durch den Schwerpunkt jedes der beiden Körper geht. Soll dieses in jeder Lage der beiden Körper stattfinden, so müssen sie nothwendig sphärisch sein; aber für eine besondere Lage kann dieses bei unendlich vielen verschiedenen Formen der Fall sein. Wenn die gerade Linie, nach welcher die beiden Körper auf einander wirken, nicht durch den Schwerpunkt des einen geht, so wird dieser Körper in eine drehende Bewegungung versetzt, welchen Fall wir aber hier nicht betrachten.

Wenn die gerade Linie, nach welcher die beiden Körper auf einander einwirken, zugleich die ist, nach welcher sie sich bewegen, so wird der Stoß ein *gerader* genannt, und wenn einer oder beide Körper sich nach einer andern geraden Linie bewegen, so wird ihr Stoß ein *schiefer* genannt.

Die *relative* Geschindigkeit der beiden Körper ist die Geschwindigkeit, mit welcher sie sich einander gegenseitig nähern, oder von einander entfernen; sie ist also der Unterschied ihrer wirklichen Geschwindigkeiten, wenn sie sich nach derselben Richtung bewegen, und die Summe ihrer Geschwindigkeiten, wenn sie sich nach entgegengesetzten Richtungen bewegen. Nun wird aber bei dem geraden Stoße zweier Körper, welche sich mit *gleichen Momenten* nach entgegengesetzten

Richtungen bewegen, wie bereits früher bemerkt, die Geschwindigkeit eines jeden während der Zusammendrückung aufgehoben, während im Gegentheil während der Wiederherstellung der Form eine gewisse Geschwindigkeit hervorgebracht wird (§. **129.**). Das Verhältniss der aufgehobenen und erzeugten Geschwindigkeit kann als ein Maß des Verhältnisses der Kräfte der Zusammendrückung und Formherstellung betrachtet werden, und es ist alsdann durch Versuche zu ermitteln, in welcher Beziehung diese Kräfte zu einander stehen.

§. **135.** Lehrsatz. Wenn zwei sich nach derselben geraden Linie und in entgegengesetzten Richtungen bewegende Körper mit gleichen Momenten zusammenstoßen, so werden ihre Geschwindigkeiten durch die Zusammendrückungskraft aufgehoben, und durch die Kraft der Formherstellung neue, einander gleiche und entgegengesetzte Momente hervorgebracht.

Bei dem Beweise des dritten Bewegungsgesetzes (§. **129.**) haben wir gesehen, dass, wenn zwei unelastische Körper, welche sich auf derselben geraden Linie nach entgegengesetzten Richtungen bewegen, mit gleichen Momenten zusammenstoßen, die Bewegungen beider aufgehoben werden, so dass diese Körper nach dem Stoße in Ruhe bleiben, und wenn sie nicht unelastisch sind; so entfernen sie sich nach dem Stoße mit Geschwindigkeiten von einander, die nach der Natur der Körper verschieden sind. In diesem Falle besteht die Wirkung zwischen den beiden Körpern offenbar aus zwei Theilen, nämlich aus der Zusammendrückung oder der Formveränderung, welche durch den Druck bei ihrem Zusammenstoßen hervorgebracht wird, und aus der Wiederherstellung der Form, welche die Elasticität bewirkt, und vermöge welcher sich die Körper von einander entfernen. Offenbar ist die Wirkung des ersten Theiles dieselbe, als wenn sie unelastisch wären. Denn wenn die Zusammendrückung vollendet ist und wir nehmen an, dass sich die innere Constitution der Körper in dem Augenblicke, wo die Zusammendrückung aufhört und die Formherstellung beginnen will, so verändert, dass sie alle ihre Elasticität verlieren; so bleiben sie mit einander in Berührung und die Gesetze ihrer Bewegung sind dieselben als für unelastische Körper. Sie verlieren also während dieses ersten Theiles des Zusammenstoßens ihre ganze Geschwindigkeit, wie unelastische Körper.

Wenn sich die Körper hierauf vermöge ihrer Elasticität von einander entfernen, so sind die Momente, welche ihnen durch ihren gegenseitigen Druck wieder ertheilt werden, nach dem dritten Bewegungsgesetze gleich; aber die jetzige Größe ihrer Geschwindigkeiten, und mithin die relative Geschwindigkeit, mit welcher sich die Körper von ein-

ander entfernen, sind von ihrer Elasticität abhängig, und das unter diesen Umständen herrschende Gesetz muss, wie wir sehen werden, durch Versuche bestimmt werden.

§. **136.** Lehrsatz. Bei dem geraden Stoße elastischer Körper steht die Kraft der Formherstellung zu der der Zusammendrückung in einem Verhältnisse, welches für Körper von derselben Natur constant ist.

D. h., welche Geschwindigkeiten, Größen und Formen die fraglichen Körper auch haben mögen, so lange ihre Massen dieselben bleiben, ist das Verhältniss der Geschwindigkeit eines jeden nach dem Stoße zu der Geschwindigkeit vor dem Stoße dasselbe. Wenn aber die Geschwindigkeit jedes Körpers nach dem Stoße zu seiner Geschwindigkeit vor demselben in einem gewissen Verhältnisse steht, so muss auch die Summe dieser Geschwindigkeiten, d. h. die relative Geschwindigkeit, mit welcher sich die Körper von einander entfernen, zu der Geschwindigkeit, mit welcher sie sich einander näherten, in einem gegebenen Verhältnisse stehen, was, wie man findet, wirklich der Fall ist.

Die zum Beweise dieses Satzes erforderlichen Versuche lassen sich auf folgende Weise anstellen. Es seien A, B (Fig. **118.**) zwei an den verticalen Schnüren C A, D B hängende Kugeln, welche aus ihrer verticalen Lage entfernt und dann so fallen gelassen werden, dass sie einander in dem tiefsten Punkte treffen und sich wieder von einander entfernen; so lassen sich aus den Bogen, längs welcher sie herabgefallen sind, und aus denen, um welche sie wieder aufsteigen, wie wir später sehen werden, die Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoße berechnen, und auf diese Weise haben Newton und andere gefunden, dass die relativen Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoße in einem gegebenen Verhältnisse stehen. *)

---

*) Newton, Principia, liv. I.: »Propterea, quod vis illa (elastica) certa ac determinata sit (quantum sentio) faciatque ut corpora redeant ab invicem cum velocitate relativa, quae sit ad velocitatem relativam concursus in data ratione.« Hierauf gibt Newton an, auf welche Weise und mit welchen Substanzen er seine Versuche angestellt hat. Versuche mit elastischen Körpern sind **1670** von Wren und Hooke vor der königlichen Sociatät zu London angestellt. Auch Mariotte hat solche Versuche angestellt, wovon er in seinem Traité de percussion Nachricht gibt. Smeaton hat die Fundamentalversuche mit elastischen Körpern vermittelst eines sinnreichen Apparates, durch welchen man die Wirkungen weicher und elastischer Köper von einander unterscheiden kann, wiederholt; aber alle diese Mechaniker, Newton ausgenommen, haben ihre Versuche als mit vollkommen elastischen Körpern angestellt betrachtet, und die meisten vorkommenden elastischen Körper für Annäherungen zu vollkommen elastischen Körpern genommen. Die Theorie der unvollkommen elastischen Körper ist, wie wir später sehen werden, auf

Wenn die Körper mit Geschwindigkeiten zusammenstoßen, welche sich nicht umgekehrt wie ihre Massen verhalten, so lässt sich, wie bald gezeigt werden wird, bestimmen, wie groß ihre Geschwindigkeiten nach dem Stoße sein müssen, und es ergibt sich, dass das gefundene Resultat mit denen der Beobachtung übereinstimmt. Am einfachsten lässt sich der Versuch anstellen, wenn sich der eine Körper in Ruhe befindet und der andere gegen denselben stößt.

Körper heißen vollkommen elastisch, wenn die Kraft der Formherstellung der der Zusammendrückung gleich ist, und wenn erstere kleiner ist als letztere, so werden die Körper unvollkommen elastisch genannt. Die Elasticität unvollkommen elastischer Körper wird durch den Bruch ausgedrückt, welcher die Kraft der Formherstellung von der der Zusammendrückung ist. So folgt z. B. aus Newtons Versuchen, dass bei dem Zusammenstoßen wollener Kugeln die relativen Geschwindigkeiten nach und vor dem Stoße sich wie **5:9** verhalten, und folglich drückt der Bruch $\frac{5}{9}$ die Elasticität in diesem Falle aus. Bei Stahlkugeln war dieses Verhältniss fast dasselbe, bei Korkkugeln etwas kleiner, bei Elfenbeinkugeln = **8:9** und bei Glaskugeln = **15:16**. Die vollkommene Elasticität würde also hiernach durch die Einheit ausgedrückt. In jedem Falle kann die Größe der Elasticität durch einen einzelnen Versuch bestimmt und durch einen Bruch e ausgedrückt werden, der den Theil ausdrückt, welcher die Kraft der Formherstellung

---

Newtons Auctorität als richtig angenommen; und in der That könnte man sich, wenn es überhaupt einer Auctorität bedürfte, auf keine andere mit mehr Sicherheit verlassen. Aber da die Elasticität von der innern Constitution so gänzlich verschiedener Körper, wie Metalle, Steine, Elfenbein, Korkholz, etc. abhängig ist, so wäre es, wenn auch nicht unwahrscheinlich, so doch höchst merkwürdig, wenn sie in allen diesen Fällen ein allgemeines Gesetz befolgte, und wenn dieses Gesetz reell und genau wahr ist, so verdient es durch wiederholte Versuche bestätigt zu werden, und gerade wenn fernere Beobachtungen die Richtigkeit der Newtonschen Resultate bestätigen sollten; so wären noch mehrere Fragen zu beantworten, wozu seine Versuche auf keine Weise geeignet zu sein scheinen. Z. B. wenn zwei Körper von verschiedenen Graden der Elasticität gegeneinanderstoßen, wie lassen sich ihre Bewegungen bestimmen? Aber diese und andere ähnliche Aufgaben lassen sich nur dann lösen, wenn man durch neue Versuche die Grundelemente, wovon sie abhängen, bestimmt hat.

Neuere, noch nicht veröffentliche Versuche von E. Hodgkinson scheinen die Unveränderlichkeit des Elasticitätsverhältnisses zu bestätigen.

Die Begründer der gewöhnlichen Theorie des Stoßes sind Wren, Wallis und Huyghens.

Wren scheint seine Resultate durch Versuche bestätigt zu haben, und die Versuche, diese Lehre aus Grundsätzen unabhängig von der Beobachtung zu begründen sind, wie es nicht anders sein konnte, höchst ungenügend ausgefallen.

von der der Zusammendrückung ist. Wir wollen nun aus diesen Prinzipien die Bewegungen der Körper in jedem Falle des geraden Stoßes abzuleiten suchen.

I. Gerader Stoß.

§. **137.** Aufgabe. Wenn zwei unelastische Körper, die sich mit gegebenen Geschwindigkeiten bewegen, gerade gegen einander stoßen, ihre gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stoße zu bestimmen.*)

Es seien **A, B** die Massen und a, b die Geschwindigkeiten der beiden Körper, welche sich zuerst nach entgegengesetzten Richtungen bewegen mögen, und die Geschwindigkeiten a und b sollen sich umgekehrt wie die Masse **A** und **B** verhalten, so dass **A a = B b** ist, oder die Momente einander gleich sind. In diesem Falle werden, wie wir bei der Betrachtung des dritten Bewegungsgesetzes gesehen haben, die

---

*) Die hier erwähnten Körper mögen entweder weiche sein, welche ihre Form verändern, ohne sie wieder herzustellen, oder Körper von solcher Art, welche, wenn sie zusammenstoßen, durch irgend ein Mittel verhindert werden, sich von einanderzu entfernen. Im ersten Falle ist die Wirkung dieselbe, wie groß die Zusammendrückung, welche sie erleiden und die dazu angewandte Zeit auch sein mag, vorausgesetzt, dass sie nicht elastisch sind. Die Zusammendrückung und die Zeit, während welcher sie stattfindet, ist desto kleiner, je härter der Körper ist; aber wir können uns keine zwischen zwei Körpern stattfindendende Einwirkung denken, welche nicht irgend einige, wenn auch noch so geringe Zeit erfordert und folglich können wir uns keine gegenseitige Einwirkung zweier Körper vorstellen, welche vollkommen hart sind, d. h. welche auch nicht die geringste Formveränderung gestatten. Wenn es solche Substanzen gäbe, so müssten ihre gegenseitigen Einwirkungen auf einander von ganz anderer Art sein, als die der uns bekannten Körper, und wir wären folglich nicht befugt, unsere Bewegungsgesetze auf sie auszudehnen. Diejenigen, welche über solche Körper Betrachtungen angestellt haben, sind also nur in willkührliche und unerwiesene Behauptungen eingegangen. Wallis bestimmt die Bewegungen harter Körper gerade so, wie nach dem Gesagten die Bewegungen weicher Körper bestimmt werden müssen, während Huyghens und Wren diese Bewegungen wie die der vollkommen elastischen Körper annehmen. Spätere Schriftsteller sind in Beziehung auf die Bewegungen zweier harter Körper im Allgemeinen der ersten Theorie gefolgt; aber sie haben angenommen, dass das Zusammenstoßen eines vollkommen harten und eines vollkommen elastischen Körpers dieselben Gesetze befolgt, wie der Stoß zweier elastischer Körper. Da wir aber in der Natur nirgends eine Erscheinung finden, aus welchen die Prinzipien für solche Fälle abgeleitet werden könnten, so können die betreffenden Aufgaben hier nur mit Hülfe willkührlicher Hypothesen gelöst werden, und gehören folglich nicht in die Mechanik, als die Wissenschaft, welche sich mit den wirklichen Bewegungsgesetzen beschäftigt. Von dem Einflusse der verschiedenen Grade der Härte der Körper wird später die Rede sein.

Geschwindigkeiten der Körper durch ihr Zusammenstoßen aufgehoben, und da sie als unelastisch angenommen werden, also kein Bestreben haben, sich von einander zu entfernen, so bleiben sie folglich auch im Ruhezustande mit einander in Berührung.

Wenn nun die Bewegungen und das Zusammenstoßen dieser Körper in einem begrenzten Raume stattfinden, welcher nicht in Ruhe ist, sondern sich nach irgend einer Richtung gleichförmig fortbewegt, so bleiben die Bewegungen der Körper in Beziehung auf die Theile dieses Raumes noch ganz dieselben wie zuvor, und wenn sich dieser Raum mit einer Geschwindigkeit v nach der Richtung der Bewegung von A bewegt, so mögen die Körper A und B in Beziehung auf diesen Raum mit den Geschwindigkeiten α und β zusammenstoßen, welche so beschaffen sind, dass $A\alpha = B\beta$ ist; so bleiben sie nach dem Stoße in Beziehung auf diesen Raum in Ruhe. Aber da der Raum, worin sich die beiden Körper befinden, sich nach der Richtung der Bewegung von A mit der Geschwindigkeit v fortbewegt, so hat A vor dem Stoße eine absolute Geschwindigkeit $= \alpha + v$, und der Körper B, welcher nach derselben Richtung mit einer Geschwindigkeit v und in entgegengesetzter Richtung vermöge seiner eigenen Bewegung mit einer Geschwindigkeit β fortrückt, hat in der ersten Richtung eine absolute Geschwindigkeit $= v - \beta$, indem $v > \beta$ angenommen wird. Ferner befinden sich die beiden Körper nach dem Stoße in Beziehung auf den betrachteten Raum in Ruhe, und haben, wie dieser, eine gemeinschaftliche Geschwindigkeit v.

Hieraus erhellet, dass, wenn ein Körper A mit einer Geschwindigkeit $a = \alpha + v$ auf einen Körper B stößt, welcher sich mit einer Geschwindigkeit $b = v - \beta$ bewegt, sie nach dem Stoße sich mit einer gemeinschaftlichen Geschwindigkeit v bewegen. Da nun:

$$a = \alpha + v, \text{ und } b = v - \beta$$

ist, so haben wir:

$$\alpha = a - v \text{ und } \beta = v - b$$

und die Gleichung $A\alpha = B\beta$ verwandelt sich in

$$A(a - v) = B(v - b),$$

woraus folgt:

$$Aa + Bb = Av + Bv$$

$$\text{und } v = \frac{Aa + Bb}{A + B}.$$

Wenn v nicht größer als β ist, so ist die absolute Geschwindigkeit von B vor dem Stoße $= \beta - v$ und mit der von A von entgegengesetzter Richtung. Bezeichnen wir sie also mit b, so ist:

$$\beta = b + v \text{ und } A(a - v) = B(b + v);$$

folglich:
$$v = \frac{Aa - Bb}{A + B},$$

welcher Werth sich von dem vorhergehenden nur durch das negative Zeichen von b unterscheidet. Wenn also a und b die Geschwindigkeiten nach derselben Richtung bezeichnen, und wenn die Geschwindigkeiten von der entgegengesetzten Richtung als negativ betrachtet werden; so gilt der erste Ausdruck für v allgemein.

Zusatz 1. Wenn der resultirende Werth von v negativ ist, so bewegen sich die Körper nach dem Stoße in einer Richtung, welche der als positiv angenommenen entgegengesetzt ist.

Zusatz 2. Wenn $b = o$ ist, oder wenn der Körper A auf den in Ruhe befindlichen Körper B stößt, so ist ihre Geschwindigkeit nach dem Stoße:

$$v = \frac{Aa}{A + B}$$

Zusatz 3. Die von A verlorene Geschwindigkeit ist

$$a - v = a - \frac{Aa + Bb}{A + B} = \frac{B(a - b)}{A + B},$$

während die von B in der Richtung der Bewegung von A gewonnene Geschwindigkeit

$$v - b = \frac{Aa + Bb}{A + B} - b = \frac{A(a - b)}{A + B}$$

ist, und $a - b$ ist offenbar die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Körper einander nähern, d. h. die relative Geschwindigkeit derselben.

Zusatz 4. Wenn sich B vor dem Stoße mit A nach entgegengesetzter Richtung bewegt, so ist die von B in der Richtung der Bewegung von A gewonnene Geschwindigkeit nicht der Ueberschuss der Geschwindigkeit nach dem Stoße über die vor demselben, sondern die Summe der in der entgegengesetzten Richtung aufgehobenen und der nach der Richtung der Bewegung von A mitgetheilten Geschwindigkeit. Dieses Resultat ergibt sich auch aus dem Ausdrucke in dem letzten Zusatze, wenn man die Geschwindigkeiten mit den gehörigen Zeichen setzt, und dasselbe ist auf die von dem Körper A verlorene Geschwindigkeit anwendbar, wenn er sich nach dem Stoße in entgegengesetzter Richtung bewegt.

Zusatz 5. Das von A verlorene Moment ist:

$$Aa - Av = \frac{AB(a - b)}{A + B}$$

und das von B gewonnene Moment:

$$Bv - Bb = \frac{BA(a-b)}{A+B}.$$

Folglich sind diese beiden Momente einander gleich, und dieses ist es, was mit der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung in diesem Falle gemeint ist. Zuweilen wird diese Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung zur Grundlage der Theorie des Anstoßes genommen (s. §. **124.**).

§. **138.** Aufgabe. Zwei Körper, deren gemeinschaftliche Elasticität e ist, stoßen mit gegebenen Geschwindigkeiten direct an einander, und man soll ihre Geschwindigkeit nach dem Stoße bestimmen.

Es seien A, B die beiden Körper und a, b ihre Geschwindigkeiten und wir wollen zuerst annehmen, dass sich ihre Geschwindigkeiten umgekehrt wie ihre Massen verhalten, so dass $Aa = Bb$ ist. In dem ersten Theile des Anstoßes werden, wie im vorhergehenden Falle, die Geschwindigkeiten aufgehoben, worauf durch die Elasticität neue Geschwindigkeiten in entgegengesetzten Richtungen erzeugt werden, mit welchen sich die Körper von einander entfernen. Nach §. **136.** stehen diese Geschwindigkeiten zu denen vor dem Stoße in dem Verhältnisse von $e:1$, d. h. A kehrt mit einer Geschwindigkeit ea und B mit einer Geschwindigkeit eb zurück, und von nun an bewegen sich die Körper gleichförmig mit diesen Geschwindigkeiten.

Nun wollen wir annehmen, dass dasselbe in einem Raume stattfindet, welcher sich mit einer Geschwindigkeit x in der Richtung der Bewegung des Körpers A fortbewegt, und dass sich die Körper A, B in Beziehung auf diesen Raum mit den Geschwindigkeiten α, β bewegen, welche so beschaffen sind, dass $A\alpha = B\beta$ ist; so entfernen sie sich in diesem beweglichen Raume mit den Geschwindigkeiten $e\alpha$ und $e\beta$ von einander. Wenn also a, b die absoluten Geschwindigkeiten nach derselben Richtung vor dem Stoße, und u, v diese Geschwindigkeiten nach demselben bezeichnen; so ist die Geschwindigkeit des Körpers A die Summe aus seiner Geschwindigkeit in dem beweglichen Raume und der dieses Raumes selbst; also $a = \alpha + x$, und die Geschwindigkeit des Körpers B ist der Unterschied zwischen der Geschwindigkeit des beweglichen Raumes und seiner Geschwindigkeit in diesem Raume, also $b = x - \beta$; folglich:

$$\alpha = a - x,\ \beta = x - b$$

und da $A\alpha = B\beta$ ist, so folgt:

$$A(a - x) = B(x - b),$$

also ist: $$x=\frac{Aa+Bb}{A+B},\ \alpha=a-x=\frac{B(a-b)}{A+B},$$

$$\beta=x-b=\frac{A(a-b)}{A+B}.$$

Da nach dem Stoße der Körper A mit der Geschwindigkeit x vorwärts und rückwärts mit der Geschwindigkeit $e\alpha$ bewegt wird, so ist:

$$u=x-e\alpha,\ \text{und ebenso}\ v=x+e\beta;$$

folglich: $$u=\frac{Aa+Bb-eB(a-b)}{A+B},$$

$$v=\frac{Aa+Bb+eA(a-b)}{A+B}.$$

Diese Formeln gelten auch noch, wenn sich die Körper vor dem Stoße nicht nach derselben Richtung bewegen, wofern man den Geschwindigkeiten nur die gehörigen Zeichen gibt.

Zusatz 1. Die verlorene Geschwindigkeit des Körpers A ist:

$$a-u=\alpha+x-(x-e\alpha)=\alpha+e\alpha=\frac{(1+e).B.(a-b)}{A+B},$$

und die gewonnene Geschwindigkeit des Körpers B ist:

$$v-b=x+e\beta-(x-\beta)=\beta+e\beta=\frac{(1+e).A.(a-b)}{A+B},$$

also beide in dem Verhältnisse von $(1+e):1$ größer als in dem Falle unelastischer Körper.

Zusatz 2. Sowohl das von A verlorene, als das von B gewonnene Moment wird ausgedrückt durch:

$$\frac{(1+e)AB(a-b)}{A+B}.$$

Folglich ist die Summe der Momente vor dem Stoße gleich der Summe der Momente nach dem Stoße, oder $Aa+Bb=Au+Bv$.

Zusatz 3. Die relative Geschwindigkeit nach dem Stoße ist:

$$v-u=x+e\beta-(x-e\alpha)=e(\alpha+\beta)$$

$$=e.\frac{B(a-b)+A(a-b)}{A+B}=e(a-b).$$

Bei denselben Körpern steht also die Geschwindigkeit vor dem Stoße zu der nach demselben in einem gegebenen Verhältnisse.

Zusatz 4. Wenn die beiden Körper einander gleich sind, oder $A=B$ ist, so sind die Geschwindigkeiten nach dem Stoße:

$$u=\tfrac{1}{2}[(1-e)a+(1+e)b],$$

$$v=\tfrac{1}{2}[(1+e)a+(1-e)b].$$

Zusatz 5. Wenn sich der Körper B vor dem Stoße in Ruhe befindet, so ist $b = o$ und folglich:

$$u = \frac{(A - eB)a}{A + B},$$

$$v = \frac{(A + eA)a}{A + B}.$$

§. 139. Aufgabe. Wenn die Körper vollkommen elastisch sind, ihre Bewegungen nach dem Stoße zu bestimmen.

In diesem Falle muss in den vorhergehenden Ausdrücken $e = 1$ gesetzt werden. Folglich ist die von A verlorene Geschindigkeit:

$$= \frac{2B(a - b)}{A + B}$$

und die von B gewonnene Geschwindigkeit:

$$= \frac{2A(a - b)}{A + B}.$$

Ferner ist die relative Geschwindigkeit nach dem Stoße $= a - b =$ der relativen Geschwindigkeit vor demselben.

Zusatz 1. Wenn die beiden Körper einander gleich sind, also $B = A$ ist, so ist die von A verlorene Geschwindigkeit $= a - b$ und die gewonnene Geschwindigkeit von $B = a - b$. Folglich ist die Geschwindigkeit von A nach dem Stoße $= a - (a - b) = b$ und die von B nach dem Stoße $= b + (a - b) = a$, so dass also die beiden Körper ihre Geschwindigkeiten vertauscht haben.

Zusatz 2. Befindet sich der Körper B in Ruhe, wenn er von A angestoßen wird, so ist $b = o$; folglich die verlorene Geschwindigkeit von A:

$$= \frac{2Ba}{A + B};$$

also die Geschwindigkeit von A nach dem Stoße:

$$= a - \frac{2Ba}{A + B} = \frac{(A - B)a}{A + B},$$

und die von B nach dem Stoße:

$$= \frac{2Aa}{A + B}.$$

Wenn also die Körper einander gleich sind, so bleibt der Körper A nach dem Stoße in Ruhe und der Körper B bewegt sich mit der Geschwindigkeit von A.

Wenn die Masse von A die kleinste ist, so bewegt sich A rück-

wärts, und B bewegt sich vorwärts mit einer Geschwindigkeit, welche kleiner ist als die ursprüngliche Geschwindigkeit von A. Wenn A am größten ist, so bewegt sich B mit einer Geschwindigkeit vorwärts, welche größer ist, als die ursprüngliche Geschwindigkeit von A, und A folgt B mit einer kleinern Geschwindigkeit nach.

Zusatz 3. Wenn man also eine Reihe in Ruhe befindlicher vollkommen elastischer Körper A, B, C, D, E, ... hat, und den ersten A mit einer gewissen Geschwindigkeit gegen den zweiten B stoßen lässt, und B mit der so erhaltenen Bewegung gegen C, C gegen D, u. s. f.; so lässt sich nach dem Vorhergehenden bestimmen, was geschehen muss. Wenn nämlich alle Körper gleich sind, so bleibt jeder nach dem Stoße in Ruhe und blos der letzte bewegt sich mit der ursprünglichen Geschwindigkeit des ersten fort. Wenn die Massen der Körper von dem ersten an zunehmen, so bewegt sich jeder nach dem Stoße vorwärts; aber mit einer kleinern Geschwindigkeit als der vorhergehende, und wenn er den nächsten angestoßen hat, rückwärts. Wenn endlich die Massen der Körper der Reihe nach abnehmen, so bewegt sich jeder nach dem Stoße schneller, als der vorhergehende, und nach den Stößen bewegen sie sich alle vorwärts.

§. 140. Aufgabe. Man soll die Geschwindigkeit, welche dem Körper C von dem Körper A unmittelbar mitgetheilt wird, mit der vergleichen, welche dem Körper C mitgetheilt wird, wenn sich B zwischen A und C befindet.

Es sei a die Geschwindigkeit von A, so ist nach §. 139., Zus. 2. die dem Körper C von A mitgetheilte Geschwindigkeit $= \frac{2Aa}{A+C}$ und die dem Körper B von A mitgetheilte Geschwindigkeit $= \frac{2Aa}{A+B} = b$; folglich die dem Körper C von B mitgetheilte Geschwindigkeit

$$= \frac{2Bb}{B+C} = \frac{4ABa}{(A+B)(B+C)}.$$

Die letztere dieser Geschwindigkeiten ist aber größer, als die erste, wenn:

$$\frac{2Aa}{A+C} < \frac{4ABa}{(A+B)(B+C)},$$

oder: $(A+B)(B+C) < 2B(A+C)$,

oder: $B^2 + AB + CB + AC < 2AB + 2CB$,

oder: $B^2 - AB - CB + AC < o$,

oder: $(B-A)(B-C) < o$

ist, welches der Fall ist, wenn einer der Factoren $(B-A)$, $(B-C)$

positiv und der andere negativ, d. h. wenn der Körper B größer als der eine und kleiner als der andere der Körper A, C ist. In diesem Falle ist die dem Körper C von A vermittelst B mitgetheilte Geschwindigkeit größer als die dem Körper C unmittelbar von A ertheilte Geschwindigkeit.

Die dem Körper C vermittelst B mitgetheilte Geschwindigkeit ist am größten, wenn B das geometrische Mittel zwischen A und C ist.*)

Zusatz. Ebenso wird die dem Körper C mitgetheilte Geschwindigkeit vergrößert, wenn ein Körper eingeschoben wird, welcher ein geometrisches Mittel zwischen A und B oder zwischen B und C ist, und wenn man auf diese Weise fortfährt, zwischen dem ersten und letzten Körper mittlere proportionale Körper einzuschieben, so wird die dem letzten Körper ertheilte Geschwindigkeit fortwährend vergrößert, und nähert sich einer gewissen Grenze, welche wir im nächsten §. bestimmen wollen.

§. 141. Aufgabe. Man soll die Grenze finden, welcher sich die dem letzten Körper mitgetheilte Geschwindigkeit unter dem im letzten Zusatze erwähnten Umständen nähert.

Es seien A, B, C, D, ... Z, $(n+1)$ vollkommen elastische Körper, deren Größen oder Massen eine geometrische Progression bilden, deren Exponnent $(1+r)$ ist, so dass:

$$B=(1+r)A,\ C=(1+r)^2A,\ \text{etc.}\ Z=(1+r)^nA$$

ist; A stoße mit einer Geschwindigkeit a gegen B und theile B eine Geschwindigkeit b mit und B theile C eine Geschwindigkeit c mit, etc. und endlich sei z die Geschwindigkeit von Z, so ist:

$$b=\frac{2Aa}{A+B},\ c=\frac{2Bb}{B+C},\ \text{etc.}$$

oder:

$$b=\frac{2a}{2+r},\ c=\frac{4a}{(2+r)^2},\ \text{etc.}$$

---

*) Um den Werth von B zu finden, für welchen die C durch Vermittelung von B mitgetheilte Geschwindigkeit die möglichst größte wird, muß der Ausdruck für die Geschwindigkeit von C zu einem Maximum, oder der reciproke Werth derselben, d. h. $\frac{(A+B)(B+C)}{4ABa}$, oder indem man die constanten Factoren hinwegläßt, $B+A+C+\frac{AC}{B}$ zu einem Minimum gemacht werden. Differenzirt man also diesen Ausdruck in Beziehung auf die veränderliche B und setzt den Differenzialquotienten $=o$, so erhält man:

$$1-\frac{AC}{B^2}=o,\ \text{also}\ B^2=AC,\ \text{und}\ B=\sqrt{AC},$$

d. h. B ist das geometrische Mittel zwischen A und C.

und: $$z = \frac{2^n a}{(2+r)^n} = \frac{a}{\left[1+\frac{r}{2}\right]^n}.$$

Aber da $Z = (1+r)^n A$ ist, so ist $\sqrt{Z} = (1+r)^{\frac{n}{2}} \sqrt{A}$, und wenn man diese Gleichung mit der letzten multiplicirt:

$$z\sqrt{Z} = a\sqrt{A} \cdot \frac{(1+r)^{\frac{n}{2}}}{\left[1+\frac{r}{2}\right]^n}.$$

Nun ist aber:

$$\log\left[1+\frac{r}{2}\right]^n = n\log\left[1+\frac{r}{2}\right] = n\left[\frac{r}{2} - \tfrac{1}{2}\frac{r}{4}^2 + \text{etc.}\right]$$

$$\log(1+r)^{\frac{n}{2}} = \frac{n}{2}\log(1+r) = \frac{n}{2}\left[r - \tfrac{1}{2}r^2 + \text{etc.}\right];$$

also:

$$\frac{\log\left[1+\frac{r}{2}\right]^n}{\log[1+r]^{\frac{n}{2}}} = \frac{1-\frac{1}{4}r+\text{etc.}}{1-\frac{1}{2}r+\text{etc.}},$$

und wenn n sehr groß wird, so wird r sehr klein und kann gegen 1 vernachlässigt werden. Wenn also n unbestimmt groß wird; so wird der zweite Theil der letzten Gleichung $= 1$; folglich ist alsdann:

$$\log\left[1+\frac{r}{2}\right]^n = \log(1+r)^{\frac{n}{2}},$$

$$\left[1+\frac{r}{2}\right]^n = (1+r)^{\frac{n}{2}};$$

also: $$z\sqrt{Z} = a\sqrt{A};$$

folglich: $$\frac{a}{z} = \sqrt{\frac{Z}{A}} \text{ und } z = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{Z}} \cdot a,$$

welches die Grenze ist, der sich die Geschwindigkeit nähert, wenn die Anzahl der mittlern Proportionalgrößen zwischen A und Z unbestimmt groß wird.

§. 142. Lehrsatz. Bei dem geraden Stoße vollkommen elastischer Körper ist die Summe der Producte aus der Masse jedes Körpers und dem Quadrate seiner Geschwindigkeit vor und nach dem Stoße gleich.

Nach §. 138. Zus. 2. ist:

$$Aa + Bb = Au + Bv;$$

also: $$A(a-u) = B(v-b);$$

ferner: $a - b = v - u$ oder $a + u = v + b$; (§. 139.)

folglich, wenn man diese Gleichungen mit einander multiplicirt:

$$A(a^2 - u^2) = B(v^2 - b^2)$$

oder: $$Aa^2 + Bb^2 = Au^2 + Bv^2.$$

§. 143. Aufgabe. Bei dem geraden Stoße unvollkommen elastischer Körper die Summen der Producte aus der Masse jedes Körpers und dem Quadrate seiner Geschwindigkeit vor und nach dem Stoße mit einander zu vergleichen.

Nach §. 138. Zus. 3. ist:

$$e(a - b) = v - u;$$

also: $$ea + u = eb + v,$$

und: $$2ea + 2u = 2eb + 2v$$

oder:

$$(1 + e)(a + u) - (1 - e)(a - u) = (1 + e)(v + b) + (1 - e)(v - b),$$

und nach §. 138. Zus. 2. ist:

$$Aa + Bb = Au + Bv,$$

oder: $$A(a - u) = B(v - b).$$

Multiplicirt man die erste und letzte Gleichung mit einander, so erhält man:

$$(1 + e)A(a^2 - u^2) - (1 - e)A(a - u)^2 = (1 + e)B(v^2 - b^2) + (1 - e)B(v - b)^2;$$

folglich:

$$Aa^2 - Au^2 + Bb^2 - Bv^2 = \frac{1 - e}{1 + e}[A(a - u)^2 + B(v - b)^2].$$

Die von A verlorene Geschwindigkeit sei $= a - u = p$ und die von B gewonnene $= v - b = q$, so haben wir:

$$Aa^2 + Bb^2 = Au^2 + Bv^2 + \frac{1 - e}{1 + e}(Ap^2 + Bq^2).$$

III. Schiefer Stoß.

§. 144. Lehrsatz. Bei dem schiefen Stoße ist die Richtung der gegenseitigen Einwirkung senkrecht auf den Oberflächen in dem Berührungspunkte, und es kommen dabei blos die nach dieser Richtung zerlegten Geschwindigkeiten in Betracht.

Es sei B (Fig. 119.) eine Kugel, welche sich nach der geraden Linie bB bewegt, und von einer Kugel A, die sich nach einer auf bB senkrechten Richtung aA bewegt, gestoßen wird, und wir nehmen an, dass der Stoß in einem solchen Punkte stattfindet, dass die

Richtung der Bewegung von A durch den Schwerpunkt von B geht und zugleich senkrecht ist auf den Oberflächen in dem Berührungspunkte. Wenn also die Wirkungen der Reibung*) unberücksichtigt bleiben, so erfolgt die gegenseitige Einwirkung der Körper auf einander nur nach dieser Richtung, und die Größe der Zusammendrückung wird durch die Seitenbewegung von B nicht geändert, so dass die Wirkung ganz dieselbe ist, als wenn die Kugel A auf die in Ruhe befindliche Kugel B stieße. Auch wird die Bewegung von B nach der Richtung b B durch diese Wirkung nicht afficirt, und die B durch A ertheilte Bewegung verbindet sich mit dieser ursprünglichen Bewegung von B nach dem zweiten Bewegungsgesetze. Es drücke B n die Geschwindigkeit aus, welche A der in Ruhe befindlichen Kugel B mittheilen würde und B m drücke die ursprüngliche Geschwindigkeit von B aus, so wird, wenn man das Parallelogramm m n ergänzt und die Diagonale B q zieht, nach §. 121. die Geschwindigkeit von B nach dem Stoße durch B q ausgedrückt.

Ebenso ergibt sich in jedem andern Falle, dass die gegenseitige Einwirkung der beiden Körper nur in einer auf ihren Oberflächen im Berührungspunkte senkrechten geraden Linie erfolgt. Die senkrecht gegen diese Richtung stattfindende Bewegung wird dadurch nicht verändert und die Bewegung nach der ersten Richtung erfolgt ganz nach denselben Gesetzen, als wenn die Körper keine Seitenbewegung hätten, so dass die Verbindung dieser Bewegungen nach dem zweiten Bewegungsgesetze die Bewegung nach dem Stoße gibt.

§. **145.** Aufgabe. Zwei Körper von gegebener Elasticität stoßen mit gegebenen Geschwindigkeiten in gegebenen Richtungen an einander, und man soll ihre Bewegungen nach dem Stoße bestimmen.

Es wird wieder, wie vorhin, vorausgesetzt, dass die Verbindungslinie der Schwerpunkte der beiden Körper in dem Augenblicke des Anstoßes durch den Berührungspunkt ihrer Oberflächen geht und daselbst auf letztern senkrecht ist.

Es seien P A, Q B (Fig. **120.**) die Geschwindigkeiten der Körper A und B vor dem Stoße, so ist die Verbindungslinie A B ihrer Schwerpunkte auf ihren Oberflächen in dem Berührungspunkte c senkrecht. Man verlängere A B und fälle darauf die Perpendikel P M, Q N, so können die Geschwindigkeiten P A, Q B resp. als aus der Zu-

---

*) Während der Berührungszeit der beiden Körper muss die Oberfläche von B vermöge ihrer Seitenbewegung auf der Oberfläche von A fortgleiten, und wenn diese Oberflächen nicht als vollkommen glatt vorausgesetzt werden, so wird die Bewegung nach dieser Richtung etwas verzögert.

sammensetzung der Geschwindigkeiten PM, MA und QN, NB entstanden angesehen werden, und aus dem oben Gesagten erhellet, dass die Seitengeschwindigkeiten PM, QN durch den Anstoß nicht geändert werden, und nach demselben noch dieselben bleiben. Auch ist die Wirkung in der Richtung AB dieselbe, als wenn die Körper nur die Geschwindigkeiten MA, NB hätten.

Wir wollen also annehmen, dass die Körper mit den Geschwindigkeiten MA, NB zusammenstoßen, und es seien Am, Bn ihre nach §. 138. gefundenen Geschwindigkeiten nach dem Stoße. Man ziehe mp, nq senkrecht auf AB, und resp. gleich PM, QN, so drücken Ap, Bq die Geschwindigkeiten von A und B nach dem Stoße aus, denn sie werden zusammengesetzt aus den Geschwindigkeiten PM, QN welche durch den Stoß nicht geändert werden und aus den in der Richtung AB liegenden Geschwindigkeiten Am, Bn. Wenn wir also bestimmen können, wo die Körper zusammenstoßen, so können wir auch alle Umstände ihres Zusammenstoßes bestimmen.

§. 146. Aufgabe. Wenn sich zwei Kugeln mit gegebenen Geschwindigkeiten auf derselben geraden Linie bewegen, den Ort ihres Zusammentreffens zu bestimmen.

Wenn sich die Kugel A in M (Fig. 121.) befindet, so befinde sich die Kugel B in N und es seien MO, NQ resp. ihre Geschwindigkeiten. Die Punkte A, B seien die Lagen ihrer Mittelpunkte im Augenblicke ihers Zusammentreffens, so dass AB als die Summe der Halbmesser beider Kugeln bekannt ist, und da MA, NB in derselben Zeit beschrieben werden, so hat man:

$$MA : NB = MO : NQ;$$

also:
$$MA : MA - NB = MO : MO - NQ,$$

und:
$$MA - NB = MN + NA - (NA + AB) = MN - AB.$$

Da nun die drei letzten Glieder dieser Proportion bekannt sind, so ist es auch die Länge MA, welche die Lage von A und folglich auch von B in dem Augenblicke ihres Zusammentreffens gibt.

§. 147. Aufgabe. Wenn sich zwei Kugeln in zwei beliebigen, in derselben Ebene liegenden, nicht parallelen geraden Linien gleichförmig bewegen, ihren Zusammentreffungspunkt zu bestimmen.

Es seien MO, NO (Fig. 122.) die Richtungen der beiden Bewegungen; die Länge MO drücke die Geschwindigkeit von A und NQ die von B aus. Man ziehe MN, ergänze das Parallelogramm MP und ziehe PQ. Aus O als Mittelpunkt beschreibe man mit einem Halbmesser, welcher der Entfernung der Mittelpunkte der sich berührenden Kugeln A und B gleich ist, einen Kreis, welcher PQ in D schnei-

det, ziehe DO, ferner DB parallel zu OM und BA parallel zu DO; so sind A, B die Lagen der Mittelpunkte der beiden Kugeln im Augenblicke des Zusammenstoßens. Denn die ähnlichen Dreiecke geben:

$$NP : BD = NQ : BQ,$$

oder:

$$MO : AO = NQ : BQ;$$

also:

$$MO : MA = NQ : NB,$$

oder:

$$MA : NB = MO : NQ = \text{Geschwindigkeit von A} : \text{Geschwindigkeit von B}.$$

Wenn also der eine Körper sich in A befindet, so befindet sich der andere in B. Ferner ist $AB = OD =$ der Entfernung der beiden Mittelpunkte; die Körper befinden sich folglich alsdann in Berührung, und wenn man AB in c so theilt, dass Ac und Bc die Entfernungen der Oberflächen von den Mittelpunkten sind, so berührt eine durch c senkrecht auf AB gelegte Ebene beide Oberflächen in dem Augenblicke des Zusammentreffens.

Der aus dem Mittelpunkte O beschriebene Kreis schneidet PQ in zwei Punkten, wovon man den P zunächst liegenden nehmen muss.

§. 148. Wenn die beiden Richtungen, nach welchen sich die Kugeln bewegen, nicht in derselben Ebene liegen, so wird die Aufgabe auf eine ähnliche Weise gelöst.

Es seien zu dem Zwecke MO, NO (Fig. 122.) die Richtungen der Bewegungen der beiden Körper, M, N die Lagen derselben im Anfange der Zeit t; a, b ihre Geschwindigkeiten, der Winkel $MON = \varphi$ und c die Entfernung AB der Mittelpunkte, wenn sich die Körper berühren, welche also die Summe der Halbmesser ist, wenn die Körper Kugeln sind. Es wird angenommen, dass sich beide Körper gegen den Punkt O zu bewegen, so dass, wenn man $OM = m$ und $ON = n$ setzt, ihre Entfernungen von O am Ende der Zeit t resp. $OA = m - ta$, $OB = n - tb$ sind, und man hat:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2\,OA.OB\cos\varphi,$$

oder für den Zusammentreffungspunkt:

$$c^2 = (m - ta)^2 + (n - tb)^2 - 2(m - ta)(n - tb)\cos\varphi,$$

so dass man t durch eine quadratische Gleichung bestimmen kann, von deren beiden Wurzeln man die kleinste für den Werth der Zeit t nehmen muss; denn diese gibt den ersten Zeitpunkt, in welchem die beiden Körper zusammentreffen, und von wo an sie sich nicht wieder in derselben geraden Linie befinden, so dass die zweite Wurzel der Gleichung nicht anwendbar ist.

Auf diese Weise erhält man die Auflösung der Aufgabe, wenn

sie möglich ist, und sie ist unmöglich, wenn sich die Mittelpunkte der beiden Körper bei ihren Bewegungen einander niemals so weit nähern, dass ihre Oberflächen in Berührung kommen können. Dieses findet statt, wenn die Wurzeln der quadratischen Gleichung imaginair werden, oder was dasselbe ist, wenn der um O beschriebene Kreis die Linie PQ nicht schneidet.

§. **149.** Aufgabe. Wenn die beiden Körper nicht zusammenstoßen, den Zeitpunkt zu bestimmen, worin sie einander näher sind, als in jedem andern.

Aus dem Beweise in §. **147.** erhellet, dass, wenn man irgend eine Linie OD zieht, ferner DB parallel zu OM und BA parallel zu DO, die Lagen der beiden Körper A, B sind, für welche ihre gegenseitige Entfernung $=OD$ ist, und folglich ist diese Entfernung am kleinsten, wenn OD am kleinsten ist. Wenn man also Od senkrecht auf PQ und db, ba resp. parallel zu OM, OD zieht, so sind b und a die Lagen der beiden Körper, worin ihre gegenseitige Entfernung Od die möglichst kleinste ist.

§. **150.** Wenn sich Körper in Bewegung befinden, und außer ihrer gegenseitigen Anziehung keine Kräfte auf sie wirken, so findet hinsichtlich ihres Schwerpunktes ein merkwürdiger Satz statt, welchen wir jetzt beweisen wollen.

Lehrsatz. Wenn sich zwei Körper gleichförmig in geraden Linien bewegen, so bewegt sich ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt ebenfalls geichförmig in einer geraden Linie.

Es seien MO, NO (Fig. **123.**) die geraden Linien, welche die beiden Körper beschreiben, und G ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt, wenn sie sich in irgend einer Lage A, B befinden. Ferner befinde sich B in Q, wenn A sich in O befindet, und ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt alsdann in R; so ist, wenn man $Bb=QO$ nimmt, $bO=BQ$; folglich das Verhältniss:

$OA:Ob=OA:QB=$ Geschwindigkeit von A : Geschwindigkeit von B

constant, und mithin bleibt das Dreieck AOb in allen Lagen von A, B sich selbst ähnlich. Nimmt man nun den Punkt g so, dass das Verhältniss $Ag:bg=B:A$ constant ist, so bleibt sich das Dreieck Aog in allen Lagen der Körper ähnlich uud der geometrische Ort des Punktes g ist eine gerade Linie. Aber da sich verhält:

$$Ag:bg=B:A=AG:BG,$$

so ist Gg parallel zu Bb, und es verhält sich:

$$Gg:Bb=AG:AB,$$

oder: $$Gg:OQ=B:A+B=OR:OQ.$$

Folglich ist Gg gleich und parallel OR und OG ist ein Parallelogramm, weil RG zu Og parallel ist. Mithin ist der geometrische Ort von G eine gerade Linie. Ferner steht $Rg \rightleftharpoons Og$ in einem gegebenen Verhältnisse zu OA, und folglich nimmt RG gleichförmig zu, wie OA, und G bewegt sich mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit.

Dieser Beweis lässt sich leicht auch auf den Fall ausdehnen, wo sich die Körper nach geraden Linien bewegen, die in verschiedenen Ebenen liegen.

§. **151.** Der Lehrsatz im vorhergehenden §. lässt sich auch auf folgende Art beweisen.

Zunächst wollen wir annehmen, dass sich die Körper A, B nach derselben geraden Linie bewegen und zu irgend einer Zeit t seien x, x′ ihre Entfernungen von einem gegebenen Punkte O, so liegt der gemeinschaftliche Schwerpunkt beider Körper in dieser geraden Linie, und wenn g seine Entfernung vom Punkte O bezeichnet; so ist nach §. **47**:

$$g = \frac{Ax + Bx'}{A + B}.$$

Wenn nun a und b die Geschwindigkeiten der gleichförmigen Bewegung der Körper A und B, und m, m′ ihre Entfernungen von dem Punkte O im Anfange der Zeit t sind, so ist nach §. **114**:

$$x = m + ta,\ x' = m' + tb;$$

folglich:

$$g = \frac{Am + Ata + Am' + Btb}{A + B} = \frac{Am + Bm'}{A + B} + \frac{t(Aa + Bb)}{A + B},$$

woraus erhellet, dass der Schwerpunkt beider Körper ein solcher Punkt ist, dessen Entfernung vom Punkte O im Anfange der Zeit $t = \frac{Am + Bm'}{A + B}$, und dessen Geschwindigkeit $= \frac{Aa + Bb}{A + B}$ ist.

§. **152.** Nun wollen wir annehmen, dass sich die Körper A, B in zwei geraden Linien bewegen, welche in derselben Ebene liegen, und ihre Geschwindigkeiten, wie vorhin, mit a, b bezeichnen. Durch einen Punkt O in dieser Ebene wollen wir zwei auf einander senkrechte Coordinatenaxen legen. Die Richtung der Bewegung von A bilde mit der Axe der x einen Winkel α und die Richtung der Bewegung von B bilde mit derselben geraden Linie einen Winkel β, so sind folglich die Winkel, welche diese Richtungen mit der Axe der y bilden, resp. $90^0 - \alpha$ und $90^0 - \beta$. Wenn nun x, y die Coordinaten von A, x′, y′ die von B und g, h die des Schwerpunktes beider Körper sind; so haben wir nach §. **48**:

$$g=\frac{Ax+Bx'}{A+B},\ h=\frac{Ay+By'}{A+B}.$$

Aber wenn die Geschwindigkeit von A nach den Richtungen der Axen der x und der y zerlegt wird, so ist sie nach diesen Richtungen gleichförmig, und hat resp. die Werthe $a.\cos\alpha$, $a.\sin\alpha$. Wenn also m und n die Coordinaten von A für $t=o$ sind, so haben wir:

$$x=m+ta\cos\alpha;\ y=n+ta.\sin\alpha,$$

und ebenso ergibt sich:

$$x'=m'+tb\cos\beta;\ y'=n'+tb\sin\beta,$$

indem m', n' die entsprechenden Größen für B bezeichnen. Folglich ist:

$$g=\frac{Am+Bm'}{A+B}+t\frac{(Aa.\cos\alpha+Bb.\cos\beta)}{A+B},$$

$$h=\frac{An+Bn'}{A+B}+t\frac{(Aa\sin\alpha+Bb\sin\beta)}{A+B}.$$

Hieraus erhellet, dass die Längen g und h mit den gleichförmigen Geschwindigkeiten:

$$\frac{Aa\cos\alpha+Bb.\cos\beta}{A+B}\ \text{und}\ \frac{Aa\sin\alpha+Bb\sin\beta}{A+B},$$

welche die nach diesen Richtungen zerlegten Geschwindigkeiten des Schwerpunktes beider Körper sind, beschrieben werden. Die Geschwindigkeit des Schwerpunktes ist also gleichförmig und seine Bewegung geradlinig, wie sich leicht zeigen lässt, wenn man die beiden gleichförmigen Seitengeschwindigkeiten zusammensetzt.

Wenn die von den beiden Körpern durchlaufenen geraden Linien nicht in derselben Ebene liegen, so muss man für jeden Körper drei rechtwinklige Coordinatenaxen annehmen, und alsdann lässt sich, wie vorhin, leicht zeigen, dass die nach diesen drei Axen zerlegten Geschwindigkeiten des Schwerpunktes der beiden Körper gleichförmig sind, und folglich ist auch die Geschwindigkeit des Schwerpunktes in der Richtung seiner Bewegung gleichförmig.

Zusatz 1. Die Tangente des Winkels, welchen die Richtung der Bewegung des Schwerpunktes mit der Axe der x bildet, wird ausgedrückt durch:

$$\frac{Aa\sin\alpha+Bb\sin\beta}{Aa\cos\alpha+Bb\cos\beta}.$$

Zusatz 2. Auf dieselbe Weise lässt sich zeigen, dass die Bewegung des Schwerpunktes einer beliebigen Anzahl von Körpern gleichförmig ist.

§. **153.** Lehrsatz. Die Richtung und Geschwindigkeit der Bewegung des Schwerpunktes zweier Körper wird durch ihr Zusammenstoßen nicht geändert.

Zuerst wollen wir annehmen, dass sich die beiden Körper nach derselben geraden Linie bewegen, so bewegt sich ihr Schwerpunkt sowohl vor, als nach dem Stoße ebenfalls in dieser geraden Linie, und nach §. **151.** ist die Geschwindigkeit desselben

$$\text{vor dem Stoße} = \frac{Aa+Bb}{A+B}$$

$$\text{und} \qquad \text{nach dem Stoße} = \frac{Au+Bv}{A+B};$$

aber nach §. **138.** Zus. **2.** ist $Aa+Bb=Au+Bv$, und folglich wird die Geschwindigkeit des Schwerpunktes durch den Stoß nicht geändert.

Hierauf wollen wir annehmen, dass sie die beiden Körper nach zwei verschiedenen, aber in derselben Ebene liegenden geraden Linien bewegen; dann wollen wir sie wie in dem letzten §. auf rechtwinklige Coordinatenaxen beziehen, welche so genommen sind, dass die Axe der x zu den sich berührenden Oberflächen parallel ist; so wird die Bewegung in der Richtung der x nach §. **145.** durch den Stoß nicht geändert. Auch die Bewegungen nach den auf dieser Richtung senkrechten Richtungen erfolgen so, als wenn keine andere Bewegungen vorhanden wären, und folglich wird nach dem eben Gezeigten die Bewegung des Schwerpunktes nicht geändert. Da also die Bewegung des Schwerpunktes in diesen beiden auf einander senkrechten Richtungen dieselbe bleibt, so muss dieser Punkt offenbar dieselbe gerade Linie und mit derselben Geschwindigkeit, als vor dem Stoße durchlaufen.

Endlich lässt sich der Beweis, wie vorhin, auch leicht auf den Fall erstrecken, wo sich die beiden Körper nach geraden Linien bewegen, die nicht in derselben Ebene liegen.

III. Stoß gegen Ebenen.

§. **154.** Wenn ein elastischer Körper in senkrechter Richtung gegen eine unbewegliche Fläche stößt, so wird er zurückgeworfen, und man muss annehmen, dass seine Elasticität nach denselben Gesetzen wirkt, wie in den vorhin betrachteten Fällen, d. h. die Geschwindigkeit, mit welcher der Körper zurückgeworfen wird, muss zu der, mit welcher er sich gegen die feste Fläche bewegt, in einem constanten Verhältnisse stehen, welches sowohl von der Größe, als von der Geschwindigkeit des elastischen Körpers unabhängig ist, und wir

wollen daher zuerst das Resultat des schiefen Stoßes zu bestimmen suchen.

Aufgabe. Wenn ein Körper von einer gegebenen Elasticität in einer gegebenen Richtung auf eine Ebene stößt, die Richtung zu bestimmen, nach welcher er von derselben zurückgeworfen wird.

Es wird, wie vorhin, vorausgesetzt, dass das Perpendikel auf der Ebene in dem Berührungspunkte durch den Schwerpunkt des auf die Ebene stoßenden Körpers geht. Es sei CD die Ebene, PA (Fig. 124.) drücke die Geschwindigkeit des Körpers vor dem Stoße der Größe und Richtung nach aus, und CA sei das im Berührungspunkte c auf der Ebene errichtete Perpendikel. Man ziehe PM senkrecht auf CA, so kann man sich die Geschwindigkeit PA in die Geschwindigkeiten PM, MA zerlegt denken, und PM wird, wie bei dem schiefen Stoße der Körper nicht geändert, wenn wir die momentane Reibung während der Berührung unberücksichtigt lassen. Der Körper stößt also mit der Geschwindigkeit MA gegen die Ebene und wird mit einer Geschwindigkeit Am, welche zu AM in dem Verhältniss e:1, wo e die Elasticität bezeichnet, steht, von derselben zurückgeworfen. Wenn wir also mp senkrecht auf Am und $=PM$ nehmen, so ist die Geschwindigkeit des Körpers nach dem Stoße aus Am und mp zusammengesetzt, und wird daher der Größe und Richtung nach durch Ap ausgedrückt.

Zusatz 1. Wenn $e=1$ oder der Körper sowohl als die Ebene vollkommen elastisch ist, so verlängere man PM bis Q, so daß $MQ=PM$ wird; so drückt AQ die Richtung und Größe der Geschwindigkeit des Körpers nach dem Stoße aus.

Zusatz 2. Die Winkel, welche die Richtungen der Bewegungen des Körpers vor und nach dem Stoße mit dem Perpendikel auf der Ebene im Berührungspunkte bilden, werden resp. der Einfalls- und Zurückwerfungswinkel genannt, und in dem Falle vollkommen elastischer Körper sind diese Winkel PAM, QAM offenbar einander gleich.

Zusatz 3. In jedem andern Falle sind PAM, pAm resp. der Einfalls- und Zurückwerfungswinkel, und man hat:

$$\text{tang PAM} : \text{tang pAm} = \frac{PM}{AM} : \frac{pm}{Am}$$

$$= Am : Am, \text{ wegen } pm = PM,$$

oder:

tang d. Einfallswinkels : tang d. Zurückwerfungswinkels $= e:1$.

Zusatz 4. Wenn man die Linie Qp zieht, so ist sie parallel zu AM; folglich verhält sich:

$$QA : Ap = \sin QpA : \sin AQp$$
$$= \sin pAM : \sin QAM,$$

oder weil $QA = PA$, und $QAM = PAM$ ist:

Geschwindigk. vor d. Stoße : Geschw. nach d. Stoße = sin d. Zurückwerfungswink. : sin des Einfallsw.

Zusatz 5. Wenn der Körper vollkommen unelastisch und vollkommen glatt ist, so bewegt er sich nach dem Stoße mit seiner Seitengeschwindigkeit längs der Ebene fort und es verhält sich:

Geschw. vor d. Stoße : Geschw. nach d. Stoße $= PA : PM.$
$= 1 : \cos APM,$

wo APM der Winkel ist, welchen die Einfallsrichtung mit der Ebene bildet.

Vermittelst der in diesem Kapitel entwickelten Sätze lassen sich nun leicht folgende Aufgaben lösen.

§. 155. Aufgabe 1. A und B sind zwei Körper, deren Elasticität $= e$ ist; in welchem Verhältnisse müssen ihre Massen stehen, damit A, wenn er direct auf B stößt, nach dem Stoße in Ruhe bleibt?

Nach §. 138. Zus. 5. ist die Geschwindigkeit von A nach dem Stoße $= \frac{(A - eB)a}{A + B}$, und wenn diese gleich Null sein soll, so muss $A = eB$, oder A in dem Verhältniss $e : 1$ kleiner sein, als B.

Dieser Schluss ist unabhängig von der Geschwindigkeit von A und gibt daher ein Mittel an die Hand, die Genauigkeit der gewöhnlichen Voraussetzung in Beziehung auf die Elasticität experimental dadurch zu prüfen, dass man zusieht, ob, wenn die beiden Körper in diesem Verhältnisse stehen, A nach dem Stoße in Ruhe bleibt.

§. 156. Aufgabe 2. Wenn eine vollkommen elastische Kugel A auf eine ebenfalls vollkommen elastische und in Ruhe befindliche Kugel B stößt, die Bedingungen zu finden, unter welchen es möglich ist, dass A und B nach dem Stoße resp. durch zwei gegebene Punkte P und Q (Fig. 125.) gehen.

Man verbinde den Punkt Q mit dem Mittelpunkte B des zweiten Körpers und die verlängerte Richtung QB treffe die Oberfläche der ersten Kugel in c. Soll sich nun B nach dem Stoße in der Richtung BQ bewegen, so muss die Berührung offenbar in dem Punkte c stattfinden, und folglich muss der Mittelpunkt A der andern Kugel in der Verlängerung von QB liegen. Es sei aA die Geschwindig-

keit von A vor dem Stoße und man ziehe am senkrecht auf QA, so wird, da die Kugeln einander gleich sind, der Theil mA der Geschwindigkeit nach §. 139. Zus. 2. ganz aufgehoben, so dass die Kugel A blos ihre zu am parallele Geschwindigkeit behält, und sich nach dem Perpendikel AP auf AQ bewegt.

Da aber PAQ ein rechter Winkel ist, so ist der geometrische Ort der Lagen, welche A im Augenblicke des Zusammenstoßens haben kann, ein über PQ beschriebener Halbkreis, und wenn folglich die Kugeln sehr klein sind, so ist der geometrische Ort der Lagen von B, für welche die Aufgabe möglich ist, fast ein Halbkreis.

§. 157. Aufgabe. 3. Wenn in der letzten Aufgabe die Elasticität unvollkommen und $=e$ ist, die Bedingungen zu finden, unter welchen die beiden Kugeln nach dem Stoße resp. durch die Punkte P′ und Q (Fig. 125.) gehen.

Es sei aA wieder die Geschwindigkeit von A vor dem Stoße, so muss der Mittelpunkt von A in dem Augenblicke des Zusammentreffens in der Richtung QB liegen, und wenn mA die Geschwindigkeit in dieser Richtung von dem Stoße ist, so ergibt sich die Geschwindigkeit nach dem Stoße in derselben Richtung nach §. 138. Zus. 4. Aber hiernach ist, wenn man $b=o$ setzt, $An=\frac{1}{2}(1-e)Am$, und wenn man np senkrecht auf An und gleich am zieht, so ist Ap die Richtung der Bewegung von A nach dem Stoße, welche nach der Bedingung der Aufgabe durch den Punkt P′ gehen muss.

Also umgekehrt, wenn man AP′ zieht, und von irgend einem Punkte p dieser Linie pn senkrecht auf AQ zieht, und Am so nimmt, dass:

$$An=\tfrac{1}{2}(1-e)Am \text{ oder } Am=\frac{2An}{1-e}$$

ist, und endlich ma senkrecht auf Am und $=np$ zieht, so ist aA die Richtung, in welcher sich A gegen B bewegen muss. In diesem Falle ist die Aufgabe immer möglich, wenn der Punkt A außerhalb des über P′Q beschriebenen Halbkreises liegt.

§. 158. Aufgabe. 4. Die Richtung zu bestimmen, nach welcher eine vollkommen elastische Kugel von einem gegebenen Punkte P aus nach einer gegebenen Ebene DE (Fig. 126.) geworfen werden muss, damit sie nach der Zurückwerfung von dieser Ebene durch einen gegebenen Punkt Q geht.

Man ziehe die Linie QN senkrecht auf die gegebene Ebene, verlängere sie, und nehme $Nq=NQ$ und ziehe endlich die Linie Pq,

welche die Ebene DE in A trifft, so ist PA die gesuchte Richtung. Denn zieht man AQ, so sind die Dreiecke QNA, qNA offenbar einander gleich; folglich PAD=NAq=NAQ, und da in diesem Falle der Einfallswinkel dem Zurückwerfungswinkel gleich ist, so wird die nach der Richtung PA einfallende Kugel nach der Richtung AQ zurückgeworfen, und geht mithin durch den gegebenen Punkt Q.

Wir haben hier die Kugel als einen Punkt betrachtet; aber wenn sie eine merkliche Größe hat, so sei de die zurückwerfende Ebene, und DE eine parallele Ebene zu ihr in einer Entfernung, welche dem Halbmesser der Kugel gleich ist, so ist DE die Ebene, an welcher man sich die Zurückwerfung des Mittelpunktes der Kugel vorstellen kann.

§. **159.** Aufgabe **5.** Wenn alles sich wie in der vorhergehenden Aufgabe verhält, nur dass die Kugel unvollkommen elastisch ist, die Richtung zu finden, nach welcher die Kugel auf die Ebene treffen muss, damit sie nach der Zurückwerfung durch einen gegebenen Punkt Q (Fig. **127.**) geht.

Man fälle das Perpendikel QN auf die Ebene und verlängere es bis q, so dass sich verhält Nq:NQ=**1**:e, wo e der Bruch ist, welcher die Elasticität ausdrückt, und endlich ziehe man Pq, so ist dieses die Richtung, nach welcher der Körper gegen die Ebene geworfen werden muss. Denn Pq treffe die Ebene DE in A und man ziehe AQ und Az senkrecht auf die Ebene, so verhält sich:

$$\text{tang}\,PAz : \text{tang}\,QAz = \text{tang}.AqN : \text{tang}.AQN$$

$$= \frac{AN}{Nq} : \frac{AN}{NQ} = NQ : Nq = e : 1.$$

Wenn also der Körper nach der Richtung PA auf die Ebene stößt, so wird er vermöge §. **154.** Zus. **3.** nach der Richtung AQ zurückgeworfen und geht durch den gegebenen Punkt Q.

Wenn die Kugel eine endliche Größe hat, so muss die Construction wie in der letzten Aufgabe modificirt werden.

Zusatz. Wenn das Perpendikel PM auf der Ebene die Linie QA in p trifft; so hat man, wie sich leicht zeigen lässt:

$$PM : Mp = qN : NQ = 1 : e.$$

Folglich wird der Punkt A gefunden, wenn man PM:Mp=**1**:e nimmt, und pQ zieht.

§. **160.** Aufgabe **6.** Die Richtung zu bestimmen, nach welcher eine vollkommen oder unvollkommen elastische Kugel von einem gegebenen Punkte P aus geworfen

werden muss, damit sie, in einer gegebenen Ordnung von einer gegebenen Anzahl von Ebenen zurückgeworfen, zuletzt durch einen gegebenen Punkt Q (Fig. 128.) geht.

Es seien DE, EF, FG die gegebenen Ebenen, welche man sich nöthigen Falls als erweitert vorstellen muss. Man ziehe QN senkrecht auf die letzte Ebene und nehme QN:Nq = e:1; ferner ziehe man qn senkrecht auf die nächste Ebene und nehme qn:nq′ = e:1; dann ziehe man q′n′ senkrecht auf die folgende Ebene und nehme q′n′:n′q″ = e:1, u. s. f. Endlich ziehe man Pq″, so ist dieses die Richtung, nach welcher die Kugel geworfen werden muss. Denn Pq″ schneide die erste Ebene in A und man ziehe die Linie Aq′, welche die zweite Ebene in A′ trifft, dann ziehe man A′q, welche die dritte Ebene in A″ trifft, und ziehe A″Q; so lässt sich leicht, wie in der vorhergehenden Aufgabe, zeigen, dass, wenn die Kugel die erste Ebene in der Richtung PA trifft, sie von derselben nach der Richtung Aq′ zurückgeworfen wird, und dass, wenn sie hierauf die zweite Ebene in der Richtung AA′ trifft, von derselben nach der Richtung A′q zurückgeworfen wird, u. s. f. Der von ihr durchlaufene Weg ist also PAA′A″Q, und sie geht folglich durch den gegebenen Punkt Q.

Wenn die Kugel vollkommen elastisch ist, so müssen QN und Nq, qn und nq′, etc. einander resp. gleich sein.

Zusatz. Wenn wir die Construction bei P angefangen und PM:Mp = 1:e, etc. genommen hätten, so wären wir auf dasselbe Resultat gekommen.

Desgleichen, wenn wir zuerst von Q, und dann von P Perpendikel auf die Ebenen gezogen hätten, so dass zwischen den beiden äußersten Ebenen alle übrigen liegen, so würden wir stets dieselbe Auflösung erhalten haben, und der Beweis ist fast ganz derselbe.

Drittes Kapitel.

Gleichförmig beschleunigte Bewegung und Schwerkraft.

§. 161. Der einfachste Fall der Wirkung einer stetigen Kraft ist der, wenn diese Kraft gleichförmig, d. h. immer mit gleicher Stärke und nach der Richtung der Bewegung des Körpers wirkt. Wir wollen zuerst die Bewegung eines Körpers unter diesen Umständen betrachten, und dann sehen, auf welche Fälle diese Betrachtungen anwendbar sind.

I. Gleichförmig beschleunigte Bewegung.

Wenn sich ein Körper unter der Wirkung einer gleichförmig beschleunigenden Kraft nach einer geraden Linie bewegt, so ist die Geschwindigkeit der vom Anfange der Bewegung an gezählten Zeit proportional.

Dieses ist bereits in §. **114.** bewiesen.

Wenn f die beschleunigende Kraft, t die vom Anfange der Bewegung an gezählte Zeit und v die Geschwindigkeit bezeichnet, so ist $v = tf$, also die Geschwindigkeit v der Zeit t proportional, und die Kraft f wird durch die in **1** Sec. erzeugte Geschwindigkeit ausgedrückt. *)

§. **162.** Lehrsatz. Unter denselben Bedingungen, wie vorhin, verhalten sich die von Anfange der Bewegung an durchlaufenen Räume wie die Quadrate der zugehörigen Zeiten.

Während der Zeit t nimmt die Geschwindigkeit eines Körpers, auf welchen eine constante Kraft f fortwährend wirkt, von Null bis zu einer endlichen Größe v zu. Es ist mithin einleuchtend, dass der während irgend eines Zeitraumes mit dieser zunehmenden Geschwindigkeit beschriebene Raum kleiner ist, als der Raum, welcher während derselben Zeit beschrieben wäre, wenn die Geschwindigkeit während dieses ganzen Zeitraumes so groß gewesen wäre, als am Ende desselben. Wir wollen die Zeit t in n gleiche Theile $\tau, \tau, \tau, \ldots$ theilen, so dass $n\tau = t$ ist, so kennen wir nach dem vorhergehenden §. die Geschwindigkeit am Ende jedes dieser Zeittheile, und der Raum, welcher beschrieben worden wäre, wenn diese Geschwindigkeiten gleichförmig während jedes Zeittheilchens τ fortgedauert hätten, wird nach §. **104.** gefunden, wenn man die Geschwindigkeit mit dem zugehörigen Zeittheilchen multiplicirt. Es sind also die Geschwindigkeiten am Ende des

1ten . **2**ten . **3**ten, **4**ten, ... nten Zeittheilchens τ

resp. gleich $f\tau$, $2f\tau$, $3f\tau$, $4f\tau$, ... $nf\tau$,

und wenn diese Geschwindigkeiten während der zugehörigen Zeittheilchen τ gleichförmig gewesen wären; so wäre der in dem **1**ten, **2**ten, **3**ten, **4**ten .... nten Zeittheilchen τ beschriebene Raum resp. gleich $f\tau^2$,

---

*) Wenn die Schwerkraft $= 1$ gesetzt wird, so wird folglich eine Fmal größere Kraft als die Schwere durch F ausgedrückt, und wenn g die durch die Schwerkraft in **1** Sec. erzeugte Geschwindigkeit bezeichnet; so ist die durch die Kraft F in **1** Sec. erzeugte Geschwindigkeit $= Fg$, und für die Geschwindigkeit v hat man:

$$v = Fgt.$$

$2f\tau^2$, $3f\tau^2$, $4f\tau^2$, ... $nf\tau^2$, und die Summe aller dieser Räume ist:

$$f\tau^2(1+2+3+\ldots.n) = f\tau^2 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{f\tau^2 n^2}{2} + \frac{f\tau^2 n^2}{2n} = \frac{ft^2}{2} + \frac{ft^2}{2n}, \text{ wegen } \tau n = t.$$

Nun ist aber der von dem gleichförmig beschleunigten Körper wirklich beschriebene Raum, wie bereits bemerkt worden, in jedem dieser Zeittheilchen kleiner als der vorhin gefundene correspondirende Raum, und folglich ist auch der ganze von dem Körper beschriebene Raum, welchen wir s nennen wollen, kleiner als die Summe aller dieser Räume, d. h. es ist:

$$s < \frac{ft^2}{2} + \frac{ft^2}{2n}.$$

Aber die Summe aller mit den gleichförmigen Geschwindigkeiten beschriebenen Räume ist desto weniger von dem wirklich beschriebenen Raume verschieden, je kleiner die Zeittheilchen τ sind, und je größer mithin ihre Anzahl wird, so dass, wenn diese Anzahl unbestimmt zunimmt, die Summe der mit den gleichförmigen Geschwindigkeiten beschriebenen Räume sich dem mit der beschleunigten Bewegung beschriebenen Raume ohne Ende nähert, d. h. s nähert sich $\frac{ft^2}{2} + \frac{ft^2}{2n}$ ohne Ende, wenn n unbestimmt groß wird, und folglich ist $s = \frac{ft^2}{2}$, weil der Bruch $\frac{ft^2}{2n}$ verschwindet. Folglich ist der Raum s dem Quadrate der Zeit, d. h. t^2 proportional.*)

---

*) Dass dieses der genaue Werth von s ist, erhellet vielleicht noch deutlicher auf folgende Weise. Die Geschwindigkeiten im Anfange des

1ten, 2ten, 3ten, ... nten Zeittheilchens τ

sind resp. gleich $0, f\tau, 2f\tau, \ldots. (n-1)f\tau,$

und wenn diese anfänglichen Geschwindigkeiten während der zugehörigen Zeittheilchen gleichförmig fortgedauert hätten, so wären die beschriebenen Räume resp. gleich: $0, f\tau^2, 2f\tau^2, \ldots. (n-1)f\tau^2,$

deren Summe $= f\tau^2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{f\tau^2 n^2}{2} - \frac{f\tau^2 n}{2n} = \frac{ft^2}{2} - \frac{ft^2}{2n}$

ist. Nun ist aber der in Folge der beschleunigten Bewegung wirklich beschriebene Raum s größer als die letzte Summe, und mithin ist für jeden Werth von n: $s > \frac{ft^2}{2} - \frac{ft^2}{2n}$ und $s < \frac{ft^2}{2} + \frac{ft^2}{2n}$.

Zusatz 1. In den beiden Gleichungen $v = ft$, $s = \frac{1}{2} ft^2$ kommen vier verschiedene Größen vor und es lassen sich immer zwei derselben durch die beiden andern bestimmen. Durch einfache Eliminationen erhält man die folgenden Resultate:

$$\left.\begin{aligned} s = \tfrac{1}{2} ft^2 = \tfrac{1}{2} tv = \frac{v^2}{2f} \\ v = ft = \frac{2s}{t} = \sqrt{2fs} \\ t = \frac{v}{f} = \frac{2s}{v} = \sqrt{\frac{2s}{f}} \\ f = \frac{v}{t} = \frac{v^2}{2s} = \frac{2s}{t^2} \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Zusatz 2. Da $s = \frac{1}{2} tv$ und tv der in der Zeit t mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v beschriebene Raum ist, so ist einleuchtend, dass der von einem von der Ruhe aus gleichförmig beschleunigten Körper beschriebene Raum halb so groß ist, als der Raum, welchen der Körper mit der zuletzt erlangten Geschwindigkeit während derselben Zeit beschrieben haben würde. Folglich ist auch der Raum, durch welchen sich der Körper in der ersten Secunde bewegt, $= \frac{1}{2} f$, weil f die in 1 Sec. erlangte Geschwindigkeit bezeichnet.

Zusatz 3. Der in t Sec. beschriebene Raum ist $= \frac{1}{2} ft^2$, und der in $t - 1$ Sec. beschriebene Raum $= \frac{1}{2} f(t-1)^2 = \frac{1}{2} f(t^2 - 2t + 1)$; folglich ist der in der $t$ten Sec. beschriebene Raum $= \frac{1}{2} f(2t - 1)$.

Da aber der Bruch $\frac{ft^2}{2n}$ durch unbegrenzte Zunahme des Werthes von n kleiner gemacht werden kann, als jede gegebene Größe, so können die beiden letzten Ungleichheiten nicht anders bestehen, als wenn $s = \frac{ft^2}{2}$ ist.

Wenn wir die Schwere zur Krafteinheit genommen hätten, so wäre die Formel $s = \frac{1}{2} F g t^2$, oder wenn m den Raum bezeichnet, durch welchen ein Körper in 1 Sec. fällt, $s = mFt^2$.

Die Gleichungen im Texte ergeben sich unmittelbar aus den Gleichungen $\frac{dv}{dt} = f$ und $\frac{ds}{dt} = v$, wenn man g für f setzt, und integrirt; denn alsdann hat man:

$\frac{dv}{dt} = g$, folglich $v = gt$, und $\frac{ds}{dt} = v = gt$, also $s = \frac{1}{2} gt^2$.

Integrationsconstanten brauchen hier nicht hinzugefügt werden; denn für $t = o$ ist $v = o$ und $s = o$.

Die in der 1ten, 2ten, 3ten .... beschriebenen Räume sind also $\frac{1}{2}f.1.$, $\frac{1}{2}f.3$, $\frac{1}{2}f.5$, ... und verhalten sich also wie die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, ...

§. 163. Lehrsatz. Wenn ein Körper mit einer gegebenen Geschwindigkeit u durch eine momentan wirkende Kraft in Bewegung gesetzt wird und nach derselben Richtung eine gleichförmig beschleunigende Kraft auf ihn wirkt, die zwischen dem Raume, der Zeit und der Geschwindigkeit stattfindende Relation zu finden.

Wenn sich der Körper in einem gewissen Zeitpunkte mit einer gewissen Geschwindigkeit bewegt, so ist klar, dass seine Bewegung nach diesem Zeitpunkte immer noch von derselben Art ist, welche Geschwindigkeit er auch bereits erlangt hat, und folglich ist die Bewegung noch von derselben Art, wenn wir annehmen, dass die Geschwindigkeit durch die auf den Körper wirkende beschleunigende Kraft von der Ruhe aus erzeugt ist.

Wir wollen annehmen, dass die Kraft f, wenn sie während der Zeit t' auf den Körper wirkt, die Geschwindigkeit u erzeugt und den Körper durch den Raum s' bewegt; so ist $u = ft'$ und wenn dieselbe Kraft fortfährt auf den Körper zu wirken, so dass er in einer Zeit t einen Raum s, also in der Zeit $t' + t$ von der Ruhe aus einen Raum $s' + s$ beschreibt; so ist nach dem vorhergehenden §:

$$s' + s = \tfrac{1}{2}f(t' + t)^2 = \tfrac{1}{2}f(t'^2 + 2t't + t^2)$$

und $s' = \tfrac{1}{2}ft'^2$;

also: $s = \tfrac{1}{2}f(2t't + t^2) = ft't + \tfrac{1}{2}ft^2$;

aber: $u = ft'$; folglich $s = tu + \tfrac{1}{2}ft^2$.

Zusatz. 1. Da tu der Raum ist, welchen der Körper in der Zeit t mit der gleichförmigen Geschwindigkeit u beschreibt, und $\frac{1}{2}ft^2$ der Raum, durch welchen die beschleunigende Kraft den Körper in derselben Zeit bewegt haben würde, so ist klar, dass der zu irgend einer Zeit beschriebene Raum die Summe aus dem während derselben Zeit von dem Körper vermöge der gleichförmigen Geschwindigkeit und dem von dem Körper vermöge der Wirkung der beschleunigenden Kraft beschriebenen Raume ist.

Zusatz. 2. Wenn v die Geschwindigkeit am Ende der Zeit t bezeichnet, so ist:

$$v = f(t' + t) = ft' + ft = u + ft,$$

d. h. die Geschwindigkeit nach irgend einer Zeit ist gleich der Summe aus der dem Körper ertheilten gleichförmigen Geschwindigkeit und der

von der beschleunigenden Kraft erzeugten Geschwindigkeit, wie auch nach der Definition einer gleichförmig beschleunigenden Kraft einleuchtend ist.

Zusatz. 3. Vermöge der Gleichungen (A) haben wir auch:

$$v^2 = 2f(s' + s);\ u^2 = 2fs',$$

folglich: $$v^2 - u^2 = 2fs,\ v^2 = u^2 + 2fs.$$

§. 164. Lehrsatz. Wenn einem Körper nach einer Richtung, die der, nach welcher die beschleunigende Kraft wirkt, entgegengesetzt ist, eine gleichförmige Geschwindigkeit ertheilt wird, so behalten die Formeln in den beiden letzten §§. ihre Gültigkeit, wenn s und t die Zeit und den Raum, aber von dem Ende der Bewegung angezählt bezeichnen.

Denn in diesem Falle wird die Geschwindigkeit durch die beschleunigende Kraft vemindert, nnd da diese Kraft eine gleichförmig beschleunigende ist, so bewirkt sie in gleichen Zeiten gieiche Geschwindigkeitsabnahmen; der Körper kommt nach Verlauf einer gewissen Zeit zur Ruhe, und während dieser Zeit nimmt die Geschwindigkeit ganz auf dieselbe Weise allmählig ab, wie sie zunimmt, wenn der Körper von der Ruhe aus beschleunigt wird. Folglich sind die vom Ende der jetzt betrachteten Bewegung an gezählten Räume dieselben, als die vom Anfange der Bewegung im ersten Falle gezählten Räume.

Zusatz. 1. Wir wollen annehmen, dass dem Körper die Geschwindigkeit u ertheilt werde, und es sei t' die Zeit und s' der Raum, in welchem die ganze Geschwindigkeit durch die nach entgegengesetzter Richtung wirkende beschleunigende Kraft aufgehoben wird. In der Zeit t werde der Raum s beschrieben, so wird in der noch übrigen Zeit $t' - t$, von dem Ende der Bewegung angezählt, in einer der beschleunigenden Kraft entgegengesetzten Richtung ein Raum $s - s$ beschrieben. Wir haben also:

$$s' = \tfrac{1}{2} f t'^2$$

$$s' - s = \tfrac{1}{2} f(t' - t)^2 = \tfrac{1}{2} f(t'^2 - 2t't + t^2)$$

folglich: $$s = \tfrac{1}{2} f(2t't - t^2) = ft't - \tfrac{1}{2} ft^2$$

und wegen $u = ft'$ ist folglich $s = tu - \tfrac{1}{2} ft^2$.

Zusatz. 2. Wie in dem letzten §. ist also der in irgend einer Zeit beschriebene Raum dem Unterschiede des mit der dem Körper ertheilten gleichförmigen Geschwindigkeit beschriebenen Raumes und des Raumes, welchen der Körper in derselben Zeit von der Ruhe aus vermöge der Wirkung der beschleunigenden Kraft beschreibt, gleich.

Zusatz 3. Ebenso ist die Geschwindigkeit nach Verlauf irgend einer Zeit dem Unterschiede zwischen der dem Körper ertheilten gleichförmigen Geschwindigkeit und der während dieser Zeit durch die stetige Kraft erzeugten Geschwindigkeit gleich.

II. Verticale Bewegung durch die Schwerkraft.

§. 165. Die Schwerkraft ist innerhalb nicht zu großer Entfernungen von der Oberfläche der Erde eine gleichförmig beschleunigende Kraft.

Dieses ist bereits in §. 113. a. bewiesen.

Wenn ein Stein vermöge der Wirkung der Schwere von der Ruhe ausfällt, so nimmt seine Geschwindigkeit fortwährend zu, so lange er frei herabfällt. Das Gesetz, nach welchem diese Beschleunigung stattfindet, muss daher durch Versuche bestimmt werden und man findet, dass die durch die Schwerkraft erzeugte Geschwindigkeit der Zeit proportional ist, aus was für Materie der fallende Körper auch bestehen und unter welchen Umständen sein Fallen stattfinden mag, wofern man nur die durch den Widerstand der Luft und anderer Hindernisse hervorgebrachten Wirkungen in Betracht zieht, und folglich ist die Schwere nach dem Vorhergehenden eine constante beschleunigende Kraft.

Dieses wurde zuerst von Galiläi behauptet, für welche Behauptung er mehrere Facta anführte, und alle später angestellten Versuche bestätigten dieses. Die Bewegungen der frei fallenden Körper erfolgen so schnell, dass sie nicht mit hinreichender Genauigkeit beobachtet werden können, und sie müssen daher durch irgend ein Mittel in ihrer Geschwindigkeit so vermindert werden, dass dieses geschehen kann, ohne dass aber das Gesetz der Beschleunigung verändert wird. Dieses lässt sich auf verschiedene Weisen bewirken; denn statt den Körper, dessen Geschwindigkeit man beobachten will, frei herabfallen zu lassen, können wir ihn mit einem andern Körper verbinden, den er bei seinem Herabfallen aufwärts ziehen muss, oder indem er in einer festen, um eine Axe beweglichen Masse bei seinem Herabfallen eine Retationsbewegung hervorbringt, wodurch alsdann seine Geschwindigkeit so vermindert wird, dass sie sich beobachten lässt, oder man lässt den Körper auf einer sehr glatten geneigten Ebene oder krummen Fläche herabgleiten, so dass, wenn diese Flächen eine geringe Neigung haben, die Geschwindigkeit des Körpers so gering wird, dass sie sich beobachten lässt, oder man hängt die Körper an Fäden von gegebener Länge auf, so dass sie in Kreisbogen fallen und auf diese Weise hin- und her schwingen müssen, welches dasselbe ist, als wenn man sie auf vollkommen glatten kreisförmigen Flächen herabgleiten lässt. Dieses letzte

Verfahren gestattet die größte Genauigkeit. Die Schwingungszeiten des Pendels hängen von den Geschwindigkeiten ab, mit welchen sich die Körper in dem Kreisbogen bewegen und diese Geschwindigkeiten stehen, wie wir später sehen werden, zu den Geschwindigkeiten, womit sie nach verticaler Richtung frei herabfallen würden, in bekannten Relationen.

Da nun die beobachteten Schwingungszeiten des Pendels mit denen übereinstimmen, welche sich aus der Theorie in der Voraussetzung der Schwerkraft als einer constanten beschleunigenden Kraft ergeben; so ist diese Voraussetzung dadurch als wahr erwiesen. Ebenso beweisen die übrigen Versuche, dass die Schwere eine constante beschleunigende Kraft ist.*)

---

*) Das zuerst erwähnte Verzögerungsmittel ist bei der von Atwood erfundenen Fallmaschine in Anwendung gebracht, und man findet in seinem Treatise of Rectilinear and Rotatory Motion, Sect. 7. nähere Nachricht über die mit dieser Maschine angestellten Versuche. Galiläi dagegen ließ die Körper auf geneigten Ebenen herabgleiten; allein dieses Verfahren gestattet keine Genauigkeit; denn die Reibung bewirkt oft, dass die Körper, statt auf der schiefen Ebene fortgleiten, fortrollen, und zugleich wird die Bewegung wegen des veränderlichen Widerstandes der Reibung verändert.

Die Elemente, mit welchen sich die Schwerkraft ändern kann, wenn sie keine constante Kraft ist, sind die verschiedenen Lagen der Oerter auf der Erdoberfläche und ihre Höhe über derselben, die Geschwindigkeit der Körper, auf welche diese Kraft wirkt, so wie die Größe und Substanz der Körper. Genau genommen ändert sich die Schwere mit einigen dieser Elemente; denn sie ist eine Kraft, welche aus der Anziehung entspringt, die die Erde auf alle materielle Theile der Körper ausübt, und welche von der Entfernung dieser Theile vom Mittelpunkte der Erde abhängt. In verschiedenen Entfernungen vom Aequator und in verschiedenen Höhen ist die Intensität der Schwere merklich verschieden, wenn die Entfernung zweier Orte hinreichend groß ist, und blos aus dem Grunde, dass die Veränderungen der Intensität der Schwere innerhalb solcher Räume, wie wir sie hier betrachten, äußerst gering ist, betrachten wir die Schwere als eine constante und nach parallelen Richtungen wirkende Kraft. Es gibt auch noch andere, noch unbeträchtlichere Veränderungen der Schwere, welche von den Unregelmäßigkeiten der Form und der Vertheilung der Masse der Erde herrühren, die also ebenfalls auf ihre Anziehungen, woraus die Schwere entspringt, Einfluss haben.

Da die Schwere auf einen Körper dieselbe Wirkung hervorbringt, welche Geschwindigkeit derselbe bereits erlangt haben mag, so unterscheidet sie sich wesentlich von allen mechanischen Wirkungen, welche wir ausüben können. Drehen wir z. B. eine Kurbel durch eine gewisse Muskelanstrengung, so können wir einem Rade in 1 Sec. eine gewisse Winkelgeschwindigkeit ertheilen; aber wir können die Geschwindigkeit dieses Rades in der nächsten Secunde durch dieselbe Muskelanstrengung nicht um eine gleiche Größe vermehren, weil ein Theil der Muskelkraft zur Bewegung der Hand, welche die Kurbel dre-

§. **106.** Die Schwerkraft wirkt auf alle Körper mit gleicher Stärke, welcher Massen- und Größenunterschied auch zwischen ihnen stattfinden mag.

Dass dieses bei Körpern von verschiedener Masse der Fall ist, hat Newton zuerst durch Pendelversuche bewiesen (Princ. phil. nat. lib. **3**. prop. **6**.).

Dass Körper von derselben Masse, aber von verschiedener Größe mit derselben Geschwindigkeit fallen, ist leicht einzusehen; denn hat der eine Körper z. B. ein **10** mal größeres Volumen, als der andere, so kann man sich den ersten als in **10** Theile getheilt vorstellen, wovon jeder dem zweiten Körper gleich ist, und wenn diese Theile alle zu derselben Zeit und von demselben Punkte, aber von einander getrennt herabfielen; so würde die Fallgeschwindigkeit eines jeden Theiles der des zweiten Körpers gleich sein. Denkt man sie sich also wieder als mit einander verbunden, so können ihre Bewegungen weder einander beschleunigen noch verzögern, und mithin fällt die ganze Masse mit derselben Geschwindigkeit, als jeder einzelne Theil, oder als der zweite kleinere Körper.

§. **167.** Die Intensität der Schwerkraft, oder der Raum, durch welchen ein Körper vermöge ihrer Wirkung in **1** Sec. fällt, muss durch Versuche bestimmt werden, und die genausten zu diesem Zwecke angestellten Versuche sind die Pendelversuche. Wir werden später zeigen, dass, wenn wir die Länge eines Pendels kennen, welches in einer Secunde eine Schwingung macht, wir auch den Raum finden können, durch welchen ein Körper in derselben Zeit fällt. Aus den neuesten Versuchen dieser Art folgt z. B., dass unter der geographischen Breite von London und an der Erdoberfläche ein Körper im leeren Raume

---

het, erforderlich ist. Desgleichen, wenn durch eine Feder Bewegung mitgetheilt wird, so ist die Wirkung dieser Feder desto geringer, je mehr der Körper, gegen welchen sie drückt, nachgibt, und er kann sich mit einer solchen Geschwindigkeit bewegen, dass die Wirkung der Feder nur hinreichend ist, um letztere mit dem Körper in Berührung zu erhalten, ohne seine Geschwindigkeit im Mindesten zu vergrößern. Die Schwere dagegen wirkt mit derselben Stärke, der Körper mag sich in Ruhe befinden, oder sich nach der Richtung ihrer Wirkung, oder nach entgegengesetzter Richtung bewegen.

Man nahm anfangs an, dass schwerere Körper im Verhältnisse ihres Gewichtes schneller fielen, als leichtere; aber Galiläi zeigte die Unrichtigkeit dieser Annahme durch Versuche, und wenn die Schwere allein in Betracht kommt, so ertheilt sie allen Körpern, aus welcher Masse sie auch bestehen mögen, in gleichen Zeiten gleiche Geschwindigkeiten. Aber wegen des Widerstandes der Luft, welcher bei schwerern und kleinern Körpern geringer ist, als bei leichtern und größern, fallen erstere in der Atmosphäre mit einer größern Geschwindigkeit, als letztere.

durch eine Länge von 163,14 engl. Zollen, d. h. ungefähr von 16,1 Fuß fällt. Folglich würde der Körper nach §. 162. Zus. 2. vermöge der am Ende der ersten Secunde erlangten Geschwindigkeit, wenn sie unverändert bliebe, in derselben Zeit von 1 Sec. den Raum von 386,28 engl. Zollen durchlaufen; dieser Raum ist also ein Maß der in 1 Sec. von der Schwere erzeugten Geschwindigkeit, und drückt folglich nach der Messungsart der beschleunigenden Kräfte (§. 113.) die Intensität der Schwerkraft aus. Diese Größe wird allgemein durch g bezeichnet. Wir können daher nun auch leicht alle Aufgaben lösen, welche sich auf den Fall der Körper im leeren Raume vermöge der Wirkung der Schwere beziehen, und wir brauchen blos die bekannte Größe g für f in die Formeln (A) in §. 162. zu substituiren, wie sich an den folgenden Beispielen näher zeigen wird.*)

Beispiel 1. Man soll den Raum finden, welchen ein schwerer Körper in $2\frac{1}{2}$ Secunden durchfällt, und die Geschwindigkeit, welche er am Ende dieser Zeit erlangt hat.

Wenn man in dem ersten Ausdrucke für s unter den Gleichungen (A), g für f setzt, so erhält man:

$$s = \tfrac{1}{2} g t^2 = \tfrac{1}{2} \times 32{,}2 \times (\tfrac{5}{2})^2 = 100{,}6 \text{ Fuß},$$

und für die Geschwindigkeit v:

$$v = g t = 32{,}2 \times \tfrac{5}{2} = 80{,}5 \text{ Fuß}.$$

Beispiel 2. Ein Körper wird mit einer Geschwindigkeit von 100 Fuß senkrecht in die Höhe geworfen; man soll die größte Höhe bestimmen, welche er erreicht, so wie die Zeit, welche er dazu gebraucht.

Nach §. 164. ist die größte Höhe, welche der Körper erreicht, der gleich, von welcher er herabfallen müsste, um die ihm ertheilte anfängliche Geschwindigkeit zu erlangen, und folglich gibt die erste der Gleichungen (A):

$$s = \frac{v^2}{2g} = \frac{100^2}{2 \times 32{,}2} = \frac{10000}{64{,}4} = 155{,}28 \text{ Fuß}.$$

Ebenso ist die Zeit des Aufsteigens der des Herabfallens gleich, und folglich nach dem ersten Ausdrucke für t:

$$t = \frac{v}{g} = \frac{100}{32{,}2} = 3{,}1 \text{ Sec.}$$

*) Der Fall eines Körpers in der Atmosphäre ist fast derselbe, wie im leeren Raume, so lange seine Geschwindigkeit gering ist; aber wenn Körper durch große Höhen frei herabfallen, so wird der Widerstand der Luft beträchtlich, so dass die Wirkung desselben auf das Endresultat einen merklichen Einfluss hat.

Beispiel 3. Unter denselben Voraussetzungen, wie in dem vorhergehenden Beispiele, die Höhe zu finden, bis zu welcher der Körper in zwei Secunden steigt.

Setzt man in §. 164., g für f, so hat man:

$$s = tu - \frac{1}{2}gt^2 = 2 \times 100 - \frac{1}{2} \times 32{,}2 \times 4 = 200 - 64{,}4$$
$$= 135{,}6 \text{ Fuß.}$$

Vermittelst unserer Formeln lassen sich auch leicht Aufgaben wie die folgenden auflösen.

§. 168. Aufgabe. Es lässt jemand einen Stein in einen Brunnen fallen und hört denselben nach t Secunden auf die Oberfläche des Wassers schlagen, und man soll die Tiefe der letztern finden, wenn der Widerstand der Luft unberücksichtigt bleibt.

Die Geschwindigkeit des Schalles ist nach Versuchen gleichförmig, und = 1130 Fuß in der Secunde. Nun ist aber die Zeit zwischen dem Anfangspunkte des Fallens des Steines und dem Augenblicke, wo man den Schall seines Aufschlagens auf die Wasserfläche hört, gleich der Summe aus der Fallzeit des Steines und der Zeit, während welcher der Schall die Fallhöhe des erstern durchläuft. Bezeichnen wir diese Fallhöhe mit x und die Geschwindigkeit des Schalles mit n, so ist die Fallzeit durch den Raum $x = \sqrt{\frac{2x}{g}}$, und die Zeit, während welcher der Schall den Raum x durchläuft $= \frac{x}{n}$; folglich:

$$\frac{x}{n} + \sqrt{\frac{2x}{g}} = t,$$

$$\frac{2x}{g} = t^2 - \frac{2tx}{n} + \frac{x^2}{n^2};$$

$$x^2 - 2\left(tn + \frac{n^2}{g}\right)x = -t^2n^2$$

$$x = tn + \frac{n^2}{g} \pm \sqrt{\frac{2tn^3}{g} + \frac{n^4}{g^2}},$$

wo das negative Zeichen der Wurzelgröße genommen werden muss,*)

*) Denn die ganze Zeit t muss größer sein, als die Bewegungszeit des Schalles $\frac{x}{n}$, oder $t + \frac{n}{g} \pm \sqrt{\frac{2tn}{g} + \frac{n^2}{g^2}}$; aber t ist nicht größer als

$$t + \frac{n}{g} + \sqrt{\frac{2tn}{g} + \frac{n^2}{g^2}}.$$

und es ergibt sich, dass ungefähr $\frac{n}{g} = 35$ *) ist. Wir haben also

$$x = n\left[t + \frac{n}{g} - \sqrt{\frac{2tn}{g} + \frac{n^2}{g^2}}\right]$$
$$= n[t + 35 - \sqrt{70t + 1225}].$$

Wenn z. B. die Zeit $t = 3$ Sec. ist, so ist:

$$x = n[38 - \sqrt{1435}] = n[38 - 37{,}88]$$
$$= 0{,}12\,n = 138{,}6 \text{ Fuß.}$$

§. 169. Aufgabe. Wenn zwei Körper an den beiden Enden einer über eine feste Rolle gehenden Schnur aufgehangen sind, ihre Bewegung zu bestimmen, wenn die Trägheit der Rolle und der Schnur außer Acht gelassen werden.

Die beiden Körper seien p und q (Fig. 116.), und zwar $p > q$. Wenn $p = q$ wäre, so hielten beide einander das Gleichgewicht und es fände keine Bewegung statt, und die Kraft, welche die Bewegung hervorbringt, ist der Gewichtsunterschied $p - q$. Auch bewegen sich die beiden Körper mit gleichen Geschwindigkeiten, und mithin ist die in Bewegung gesetzte Masse $= p + q$. Die beschleunigende Kraft ist daher dem Producte aus $\frac{p-q}{p+q}$ und einer constanten Größe gleich (§. 125.).

Es sei die beschleunigende Kraft $f = \frac{p-q}{p+q}c$, so ist, wenn $q = o$ ist, oder p frei herabfällt, die beschleunigende Kraft $= g$; folglich $c = g$. Es ist also allgemein $f = \frac{p-q}{p+q}.g$, was mit Beispiel 2. in §. 126. übereinstimmt. Substituiren wir diesen Werth für f in die Gleichungen (A), so ergeben sich die Umstände der Bewegung für jeden gegebenen Fall.

Beispiel. Wenn $p = 81$ und $q = 80$ Unzen ist, den von p in 1 Sec. beschriebenen Raum und die am Ende derselben erlangte Geschwindigkeit zu finden.

---

*) Wenn $n = 1127$ Fuß ist, so ist genau $\frac{n}{g} = 35$. Der allgemein für n genommene Werth ist 1142 und 1130 Fuß. Neuere Versuche wollen gezeigt haben, dass die Geschwindigkeit des Schalles bei der gewöhnlichen Temperatur der Luft kleiner ist; allein die Bestimmungen sind noch zu veränderlich, als dass man einen bestimmten Werth annehmen könnte.

Es ist:

$$s = \frac{g}{2} \cdot \frac{p-q}{p+q} t^2 = 16{,}1 \times \frac{1}{161} \times 1^2 = 0{,}1 = \frac{1}{10} \text{ Fuß},$$

$$v = g \cdot \frac{p-q}{p+q} = 32{,}2 \times \frac{1}{161} = 0{,}2 = \frac{1}{5} \text{ Fuß}.$$

Wenn der Körper p den Körper q nicht senkrecht in die Höhe, sondern längs einer horizontalen Ebene fortzöge, indem z. B. q auf einem vollkommen polirten Tische läge und mit p durch eine erst parallel zu der Fläche des Tisches und dann zur Seite desselben senkrecht abwärts gerichtete Schnur verbunden wäre; so würde das ganze Gewicht von p zur Hervorbringung der Bewegung verwandt, und da sich beide Körper wieder, wie vorhin, mit gleicher Geschwindigkeit bewegten, folglich als eine einzige Masse $p+q$ betrachtet werden könnten; so wäre die beschleunigende Kraft:

$$f = \frac{pg}{p+q}.$$

III. Bewegung auf geneigten Ebenen.

§. 170. Aufgabe. Die beschleunigende Kraft eines auf einer geneigten Ebene herabfallenden Körpers zu finden.

Wenn ein Körper q auf einer geneigten Ebene von der Höhe h und Länge l durch eine parallel zu der Ebene wirkende Kraft p im Gleichgewichte erhalten wird, so verhält sich nach §. 38. Zus. 2.

$$p:q = h:l, \text{ folglich ist } p = \frac{q \cdot h}{l}.$$

Wenn sich also der Körper q nicht im Gleichgewichte befindet, sondern auf der schiefen Ebene ungehindert herabgleiten kann, so ist $\frac{qh}{l}$ der Druck, welchen er längs der Ebene ausübt, und welcher seine Bewegung hervorbringt, und die bewegte Masse ist alsdann die des Körpers q selbst.*)

*) Die Ebene wird als vollkommen polirt vorausgesetzt, so dass sie längs ihrer Richtung keinen Widerstand ausübt, in welchem Falle der Körper q, selbst wenn er eine Kugel wäre, die schiefe Ebene nicht herabrollen kann, sondern herabgleiten muss. Aber in der Wirklichkeit ist die Reibung wenigstens immer so groß, dass sie bei runden Körpern eine Rotationsbewegung hervorbringt, und hierdurch wird, wie wir später sehen werden, die beschleunigende Kraft verändert.

Folglich ist nach §. **126.** die beschleunigende Kraft der Größe $\frac{p}{q}$ oder $\frac{h}{l}$ proportional, und wie in dem vorhergehenden §. $= \frac{hg}{l}$. Substituirt man diesen Werth für f in die Gleichungen (A), so erhält man die Gleichungen für alle bei dem Falle eines Körpers auf einer schiefen Ebene vorkommenden Fälle, und wenn der Körper von der ganzen Länge l der schiefen Ebene herabfällt; so setzt man l für s. Auf diese Weise ergibt sich aus den Gleichungen (A) in §. **162:**

$$l = \tfrac{1}{2}\frac{gh}{l}t^2,\ t^2 = \frac{2l^2}{gh},\ t = \sqrt{\frac{2l^2}{gh}},$$

und: $$v = \sqrt{2fs} = \sqrt{\frac{2gh}{l}.l} = \sqrt{2gh}.$$

Da dieser Ausdruck für die Geschwindigkeit unabhängig von der Länge der schiefen Ebene ist, so folgt, daß die Geschwindigkeit, welche ein von schiefen Ebenen ungleicher Länge, aber gleicher Höhe herabfallender Körper erlangt, für alle diese Ebenen dieselbe und zwar der Geschwindigkeit gleich ist, welche er erlangen würde, wenn er durch die senkrechte Höhe der schiefen Ebenen frei herabgefallen wäre.

Dieser Satz wurde von Galiläi zur Grundlage seiner Betrachtungen über den Fall der Körper auf schiefen Ebenen genommen.

Zusatz. Wenn α den Neigungswinkel der schiefen Ebene gegen den Horizont bezeichnet, so ist $\frac{h}{l} = \sin\alpha$ und $g.\sin\alpha$ die beschleunigende Kraft des Falles auf der schiefen Ebene, welche man in die Formeln (A) in §. **162.** für f setzen kann.

Beispiel. Eine vollkommen polirte schiefe Ebene hat eine Länge von **10** Fuß, und das eine Ende derselben liegt **1** Fuß höher als das andere; man soll die Zeit bestimmen, in welcher ein Körper längs dieser ganzen Ebene herabfällt, so wie die Geschwindigkeit, welche er am untern Ende derselben erlangt hat.

Nach den eben gefundenen Formeln ist:

$$t = \sqrt{\frac{2l^2}{gh}} = \sqrt{\frac{200}{32{,}2}} = \tfrac{10}{4} = 2\tfrac{1}{2} \text{ Zoll näherungsweise,}$$

und: $$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{64{,}4} = 8{,}02 \text{ Fuß.}$$

§. **171.** Aufgabe. Wenn von einem rechtwinkligen Dreiecke die eine Kathete horizontal und die andere ver-

tical ist, ihr Längenverhältniss so zu bestimmen, dass, wenn ein Körper durch die verticale Kathete fällt und sich mit der an ihrem untern Ende erlangten Geschwindigkeit gleichförmig nach der horizontalen Kathete fortbewegt, er dazu ebenso viel Zeit gebraucht, als wenn er längs der Hypotenuse herabgefallen wäre.

Es seien x und y resp. die verticale und horizontale Kathete; also die Hypotenuse $= \sqrt{x^2+y^2}$, so ist nach den Formeln (A) in §. 162. die Fallzeit längs $x = \sqrt{\frac{2x}{g}}$, die erlangte Geschwindigkeit $= \sqrt{2gx}$ und die Dauer der gleichförmigen Bewegung durch $y = \frac{y}{\sqrt{2gx}}$. Ferner ist nach dem vorhergehenden §., da x und $\sqrt{x^2+y^2}$ resp. die Höhe und Länge der geneigten Ebene ausdrücken, die Fallzeit durch die ganze Länge der schiefen Ebene $= \sqrt{\frac{2(x^2+y^2)}{gx}}$.

Folglich ist:

$$\sqrt{\frac{2(x^2+y^2)}{gx}} = \sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{y}{\sqrt{2gx}};$$

$$\frac{2(x^2+y^2)}{gx} = \frac{2x}{g} + \frac{2y}{g} + \frac{y^2}{2gx};$$

$$4x^2+4y^2 = 4x^2+4xy+y^2;$$

folglich: $3y = 4x$, oder $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$.

Folglich ist auch $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} = \frac{5}{4}$ und die Seiten des Dreieckes verhalten sich mithin wie die Zahlen **3**, **4** und **5**.

§. **172.** Aufgabe. Die beschleunigende Kraft zu finden, wenn ein schwerer Körper einen andern längs einer geneigten Ebene fortzieht.

Es sei in Fig. **46.** das Gewicht $W = q$ an einer Schnur WC befestigt, welche zu der geneigten Ebene parallel ist, worauf das Gewicht ruht, in C über eine feste Rolle geht und an deren anderm Ende ein Gewicht p frei herabhängt. Wenn $p = \frac{qh}{l}$ ist, so halten p und q einander das Gleichgewicht. Ist p grösser als dieser Werth, so sinkt es herab und zieht q auf der geneigten Ebene aufwärts. Wenn aber p kleiner ist als der in Rede stehende Werth, so bewegt sich q auf der

geneigten Ebene abwärts, und zieht p aufwärts, und in beiden Fällen ist die beschleunigende Kraft constant.

Wenn q von p aufwärts gezogen wird, so wird der Theil $\frac{qh}{l}$ von p zum Tragen von q verwandt, und der Rest $p-\frac{qh}{l}$ ist die Druckkraft, welche die Bewegung der beiden Körper p, q bewirkt. Diese beiden Körper bewegen sich mit derselben Geschwindigkeit, und folglich ist die beschleunigende Kraft in diesem Falle:

$$\frac{p-\frac{qh}{l}}{p+q}\cdot g=\frac{pl-qh}{pl+ql}g.$$

Wird dieser Werth für f substituirt, so können wir unsere obigen Formeln anwenden.

Aufgabe. Wenn die Bezeichnungen dieselben bleiben, die Zeit zu finden, in welcher q auf der gegebenen geneigten Ebene von der Länge l und der Höhe h durch p von dem untersten bis zum obersten Ende gezogen wird.

Es ist, wie vorhin:

$$l=\tfrac{1}{2}ft^2=\frac{pl-qh}{pl+ql}\cdot\frac{t^2g}{2};$$

also:
$$t=\sqrt{\frac{2(p+q)l^2}{g(pl-qh)}}.$$

Aufgabe. Wenn unter derselben Voraussetzug h, p und q gegeben sind, l so zu bestimmen, dass die Zeit des Aufsteigens von q längs der geneigten Ebene die möglichst kleinste ist.

Der obige Ausdruck für t, also auch für t^2, muss ein Mininum werden, und da man die Constanten-Factoren $2(p+q)$ und g hinweglassen kann, so muss $\frac{l^2}{pl-gh}$ ein Minimum oder $\frac{pl-qh}{l^2}=\frac{p}{l}-\frac{qh}{l^2}$ ein Maximum werden. Differenzirt man also den letzten Ausdruck in Beziehung auf l und setzt den Differenzialquotienten $=0$, so erhält man:

$$-\frac{p}{l^2}+\frac{2qh}{l^3}=0;\ \text{folglich}\ l=\frac{2qh}{p}.$$

Hieraus folgt $p=\frac{2qh}{l}$, d. h. p ist doppelt so groß als im Falle des Gleichgewichtes.

§. 173. Lehrsatz. Wenn sich ein Kreis in einer Verticalebene befindet, so sind die Fallzeiten durch alle von dem höchsten, oder tiefsten Punkte desselben gezogenen Sehnen einander gleich.

Denn es sei ABP (Fig. 129.) ein Kreis, AB ein verticaler Durchmesser desselben und PA irgend eine durch A gezogene Sehne, so ist nach §. 170:

$$\text{Fallzeit durch } AP=\sqrt{\frac{2AP^2}{g.AM}}.$$

Aber wegen der ähnlichen Dreiecke ist $\frac{AP}{AM}=\frac{AB}{AP}$; also $\frac{AP^2}{AM}=AB$,

und mithin: $$\text{Fallzeit durch } AP=\sqrt{\frac{2AB}{g}}.$$

Dieser Werth ist aber unabhängig von der Lage des Punktes P; folglich sind die Fallzeiten durch alle Sehnen AP, Ap, ... einander gleich, und mithin gleich der Zeit des freien Falles durch AB.

Ebenso lässt sich zeigen, dass die Fallzeiten für alle von dem tiefsten Punkte B ausgehenden Sehnen PB, pB, ... einander gleich sind.

Zusatz. Ferner ist nach §. 170. die bei dem Falle durch AP erlangte Geschwindigkeit $=\sqrt{2g.AM}$, und wie vorhin $AP^2=AM.AB$, also $AM=\frac{AP^2}{AB}$. Folglich ist die erlangte Geschwindigkeit:

$$=\sqrt{\frac{2g.AP^2}{AB}}=AP.\sqrt{\frac{2g}{AB}},$$

und da g und AB constante Größen sind, so verhalten sich die längs AP, Ap, ... erlangten Geschwindigkeiten wie die Längen AP, Ap, ...

§. 174. Lehrsatz. Wenn ABP, AQC, (Fig. 129.) zwei in einer Verticalebene liegende Kreise sind, welche einen gemeinschaftlichen höchsten Punkt haben und deren Durchmesser in derselben Verticale AB liegen, und Apq, APQ zwei beliebige Sehnen; so sind die Fallzeiten durch PQ, pq, wenn die Geschwindigkeiten in P und p Null sind, einander gleich.

Um BC beschreibe man einen Halbkreis, ziehe die Linie CQ, welche diesen Halbkreis in R schneidet, und endlich ziehe man BR, so

sind die Winkel APB, AQC, BRC rechte, und daher AQ, BR und PB, QC parallel; folglich ist PBRQ ein Parallelogramm und BR gleich und parallel PQ, und mithin ist die Fallzeit durch PQ gleich der Fallzeit durch BR. Ebenso, wenn Br parallel zu pq gezogen wird, so ist die Fallzeit durch pq der durch Br gleich; aber die Fallzeiten durch BR, Br sind einander gleich, und folglich auch die Fallzeiten durch PQ und pq.

Zusatz. Desgleichen, wenn die beiden Kreise einander in dem tiefsten Punkte berühren und von diesem Punkte aus Sehnen gezogen werden, so lässt sich leicht zeigen, dass die Fallzeiten durch die zwischen den beiden Kreisen liegenden Theile der Sehnen einander gleich sind.

IV. Ebenen des schnellsten und langsamsten Falles.

§. 175. Wir lassen hier nun eine Reihe von Aufgaben über die Ebenen, auf welchen Körper zwischen gegebenen Punkten, geraden Linien und Kreisen in der möglichst längsten oder kürzesten Zeit herabfallen, folgen. Die Constructionen und Beweise sind für alle fast dieselben, und es kann nicht die geringste Schwierigkeit haben, nach der Ausführung einiger die der übrigen zu bewerkstelligen, weswegen wir nur in einigen der wichtigsten Fälle die Constructionen und Beweise angeben.

Man soll die Ebenen des schnellsten Falles finden:

1) Von einem gegebenen Punkte P (Fig. 130.) nach einer gegebenen geraden Linie AB.

Von dem gegebenen Punkte P aus ziehe man eine Horizontale, welche die gegebene gerade Linie in A schneidet, und nehme auf der gegebenen geraden Linie abwärts AQ = AP, so ist PQ die Richtung der gesuchten Ebene.

2) Von einer gegebenen geraden Linie AB (Fig. 130.) nach einem gegebenen Punkte P.

Man ziehe PA wie vorhin, und auf der gegebenen geraden Linie nehme man aufwärts von dem Punkte A aus eine Länge AP, so gibt die Verbindungslinie des Endpunktes dieser Länge mit dem gegebenen Punkte P die Richtung der gesuchten Ebene an.

3) Von einem außerhalb eines Kreises liegenden gegebenen Punkte nach diesem Kreise.

Man verbinde den gegebenen Punkt mit dem tiefsten Punkte des gegebenen Kreises, so gibt der außerhalb des Kreises liegende Theil der Verbindungslinie die Richtung der gesuchten Ebene an.

4) Von einem gegebenen Kreise nach einem gegebenen Punkte außerhalb desselben.

Man verbinde den gegebenen Punkt mit dem höchsten Punkte des gegebenen Kreises, so gibt der außerhalb des Kreises liegende Theil der Verbindungslinie die Richtung der gesuchten Ebene an.

5) Von einem gegebenen Punkte innerhalb eines gegebenen Kreises nach diesem Kreise.

Man verbinde den gegebenen Punkt mit dem höchsten Punkte des Kreises, so gibt der zwischen dem Punkte und Kreise liegende Theil der verlängerten Verbindungslinie die Richtung der gesuchten Ebene an.

6) Von einem gegebenen Kreise nach einem gegebenen Punkte innerhalb desselben.

Man verbinde den gegebenen Punkt mit dem tiefsten Punkte des Kreises, so gibt der zwischen dem Kreise und dem gegebenen Punkte liegende Theil der verlängerten Verbindungslinie die Richtung der gegebenen Ebene.

7) Von einer gegebenen geraden Linie RM (Fig. 131.) außerhalb eines gegebenen Kreises ASB nach diesem Kreise.

Durch den tiefsten Punkt B des gegebenen Kreises ziehe man die Horizontale BM, aufwärts MB = MB und ziehe RB; so ist RS die Richtung der gesuchten Ebene.

8) Von einem gegebenen Kreise nach einer außerhalb desselben liegenden geraden Linie.

Durch den höchsten Punkt des gegebenen Kreises ziehe man eine Horizontallinie bis zum Durchschneiden mit der gegebenen geraden Linie, und nehme auf der gegebenen geraden Linie abwärts vom Durchschnittspunkte eine Länge, welche der Horizontallinie gleich ist und verbinde das untere Ende dieser Länge mit dem höchsten Punkte des Kreises; so gibt ein Theil der Verbindungslinie die Richtung der gesuchten Ebene an.

9) Von einem gegebenen Kreise nach einem andern außerhalb desselben liegenden Kreise.

Man verbinde den höchsten Punkt des ersten Kreises mit dem tiefsten Punkte des zweiten, so gibt der zwischen den beiden Kreisen liegende Theil der Verbindungslinie die Richtung der gesuchten Ebene an.

10) Von einem gegebenen Kreise nach einem andern innerhalb desselben liegenden gegebenen Kreise.

Man verbinde den tiefsten Punkt des ersten Kreises mit dem tiefsten Punkte des zweiten, so gibt der zwischen den beiden Kreisen liegende Theil der verlängerten Verbindungslinie die Richtung der gesuchten Ebene an.

11) Von einem gegebenen Kreise, welcher innerhalb eines andern liegt, nach diesem letztern.

Man verbinde den höchsten Punkt des ersten Kreises mit dem höchsten Punkte des zweiten, so gibt der zwischen den beiden Kreisen liegende Theil der verlängerten Verbindungslinie die Richtung der gesuchten Ebene an. Zugleich soll man die Ebene des längsten Falles finden.

12) Von einem gegebenen Punkte außerhalb eines gegebenen Kreises nach diesem Kreise.

Man verbinde den gegebenen Punkt mit dem höchsten Punkte des Kreises, so gibt die bis zum Durchschneiden des Kreises verlängerte Verbindungslinie die Richtung der gesuchten Ebene an.

13) Von einem gegebenen Kreise nach einem gegebenen Punkte außerhalb desselben.

Man vrrbinde den gegebenen Punkt mit dem tiefsten Punkte des gegebenen Kreises, so ist die bis zum Durchschneiden mit dem Kreise verlängerte Verbindungslinie die Richtung der gesuchten Ebene.

14) Von einem gegebenen Kreise nach einem außerhalb desselben gegebenen Kreise.

Man verbinde den tiefsten Punkt des ersten Kreises mit dem höchsten des zweiten, so ist die nach beiden Seiten bis zum Durchschneiden mit den Kreisen verlängerte Verbindungslinie die Richtung der gesuchten Ebene.

Die Ebene der längsten Fallzeit existirt in allen den Fällen nicht, wo man unter den gegebenen Bedingungen eine Horizontallinie ziehen kann; denn je mehr sich die Ebene dieser Lage nähert, desto größer wird die Fallzeit und kann über jede Grenze hinaus zunehmen. Ebenso gibt es keine Ebene der kürzten Fallzeit in allen den Fällen, wo die Kreise etc., zwischen welchen sie liegen soll, einander durchschneiden. Denn lässt man die Enden der Ebene sich diesen Durchschnittspunkten nähern, so nimmt die Länge derselben ab, und die Fallzeit wird unbestimmt klein.

§. 176. Wir wollen nun blos noch die Beweise für den 1sten, 4ten und 9ten Fall hier angeben.

Beweis für den den 1sten Fall (Fig. 130.) Man ziehe die Verticale PO und QO senkrecht auf AQ, so ist, da AQ=AP genommen ist, W. AQP=APQ und Winkel APO=AQO= einem rechten; folglich OPQ=OQP, und daher OP=OQ. Aus dem Mittelpunkte O beschreibe man mit dem Halbmesser OP einen Kreis, welcher durch den Punkt Q geht und hier AQ berührt, und der Punkt P ist der höchste. Nun ziehe man irgend eine Linie Pr, welche den Kreis in q schneidet, so ist nach dem vorhergehenden §. die Fallzeit durch Pq der Fallzeit durch PQ gleich. Folglich ist die Fallzeit durch Pr, welche größer ist, als die durch Pq, auch größer, als die durch PQ und da dieses von jeder nicht mit PQ, zusammenfallenden geraden Linie Pr gilt; so ist die Fallzeit durch PQ die kürzeste.

Beweis für den 4ten Fall (Fig. 131.) Es sei P der gegebene Punkt, AB ein verticaler Durchmesser des gegebenen Kreises, und man ziehe AP, so ist PQ die Richtung der gesuchten Ebene. Denn durch den Mittelpunkt C des Kreises AQB ziehe man die Linie CQ, welche die Verticale PO in O schneidet, so sind die Winkel OPQ, QAC, CQA, OQP einander gleich, und folglich OP=OQ. Aus dem Punkte O als Mittelpunkt beschreibe man einen Kreis PQ, welcher den Kreis AQB berührt, so ergibt sich, wie vorhin, dass die Fallzeit durch QP kleiner ist, als die Fallzeit durch irgend eine andere Ebene Pr.

Beweis für den 9ten Fall (Fig. 132.). Es seien AB, ab die verticalen Durchmesser der beiden gegebenen Kreise, und man ziehe Ab; so ist PQ die Richtung der gesuchten Ebene. Denn aus dem Beweise für den 4ten Fall erhellet, dass, durch welchen Punkt die Ebene auch gelegt werden mag, sie doch immer durch den höchsten Punkt A des ersten Kreises gehen muss, damit die Fallzeit auf dieser Ebene kleiner sei, als auf jeder andern von dem ersten Kreise zu dem Punkte Q des zweiten gehenden Ebene.

Wir haben also zu bestimmen, für welche der Ebenen pr, die erweitert durch den Punkt A gehen, die Fallzeit am kleinsten ist. Zu dem Zwecke sei c der Mittelpunkt des Kreises aQb und cQ schneide AB in O und es sei, wie vorhin, OA=OQ. Aus dem Mittelpunkte O beschreibe man einen Kreis AQ, so folgt aus §. 174. Zus. 1., dass die Fallzeit durch PQ der durch pq gleich und folglich kleiner als die durch pr ist. Es ist also PQ von allen durch den Punkt A gehenden Ebenen und folglich nach dem Gesagten, von allen Ebenen, welche man von dem einen Kreise nach dem andern legen kann, die des schnellsten Falles.

Viertes Kapitel.

Wurfbewegungen.

§. **177.** Wenn ein Körper nach irgend einer nicht verticalen Richtung geworfen wird und die Schwere wirkt auf denselben, so beschreibt er eine krumme Linie, und die Natur dieser krummen Linie lässt sich aus den in Kap. I. aufgestellten Sätzen ableiten. Aus dem zweiten Bewegungsgesetze folgt, dass, wenn ein Körper nach der Richtung AR (Fig. **133**.) mit irgend einer Geschwindigkeit geworfen wird, derselbe die Richtung AR mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen würde, wenn die Schwere nicht auf ihn wirkte; aber er fällt vermöge der Wirkung der letztern von der Ruhe aus durch den Raum Am in derselben Zeit, während welcher er sich durch AR gleichförmig bewegen würde, so dass er sich am Ende dieser Zeit in einer Lage P befindet, für welche RP gleich und parallel Am ist. Hieraus erhellet, dass die Bewegung des Körpers in einer Verticalebene stattfindet.

§. **178.** Aufgabe. Ein Körper wird von einem gegebenen Punkte aus mit einer gegebenen Geschwindigkeit nach einer gegebenen Richtung geworfen, und man soll bestimmen, wo er die durch den gegebenen Punkt gelegte Horizontalebene trifft.

Es sei A (Fig. **133**.) der gegebene Punkt; AT die Wurfrichtung, APH der beschriebene Weg und AH die Horizontalebene. Es sei der Wurfwinkel $TAH = \alpha$, die Wurfgeschwindigkeit $= V$ und die Zeit, während welcher der Körper den Weg APH zurücklegt $= T$; so würde der Körper aus den im letzten §. erwähnten Gründen in der Zeit T die Länge AT gleichförmig durchlaufen haben und in derselben Zeit vermöge der Wirkung der Schwere durch den Raum TH gefallen sein. Es ist daher nach §. **162**:

$$AT = T.V \text{ und } TH = \tfrac{1}{2} g.T^2;$$

ferner: $$TH = AT.\sin\alpha, \text{ oder } \tfrac{1}{2} g T^2 = TV\sin\alpha;$$

also: $$T = \frac{2V\sin\alpha}{g},$$

und hieraus ergibt sich $AT = T.V = \frac{2V^2\sin\alpha}{g}$; folglich:

$$AH = AT\cos\alpha = \frac{2V^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{V^2}{g}\sin 2\alpha.$$

Die Entfernung AH wird die Wurfweite und T die Wurfzeit genannt.

Zusatz 1. Wenn t die Zeit ist, in welcher irgend ein Bogen AP beschrieben wird, und RPM eine Verticale, so ist $AR = V.t$, $RP = \frac{1}{2} g t^2$; ferner:

$$PM = MR - RP = V t \sin\alpha - \tfrac{1}{2} g t^2,$$

und: $$AM = V t \cos\alpha,$$

und folglich bewegt sich der Punkt M gleichförmig in AM.

Zusatz 2. Es sei $t = \frac{1}{2} T = \frac{V \sin\alpha}{g}$ und in der Figur V die zugehörige Lage des Körpers, so ist nach Zusatz 1:

$$PM \text{ oder } VG = \frac{V^2 \sin^2\alpha}{g} - \frac{V^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{V^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Zusatz 3. Es sei $t \gtrless \frac{1}{2} T$, und wir wollen

$$t = \tfrac{1}{2} T (1 \pm m) = \frac{V \sin\alpha}{g} (1 \pm m)$$

setzen, so ist nach Zusatz 1:

$$PM = \frac{V^2 \sin^2\alpha}{g} (1 \pm m) - \frac{V^2 \sin^2\alpha}{2g} (1 \pm m)^2$$

$$= \frac{V^2 \sin^2\alpha}{2g} (1 - m^2).$$

Hieraus erhellet, daß PM am größten ist, wenn $m = o$, d. h. wenn $t = \frac{1}{2} T$ ist, oder der Körper befindet sich in der Mitte der Wurfzeit in der größten Höhe VG über der Horizontalebene.

Zusatz 4. Auch erhellet hieraus, daß PM für gleiche positive oder negative Werthe von m denselben Werth hat, und folglich befinden sich die Punkte P, P′, welche gleichen Zeiten, vom höchsten Punkte V angerechnet, entsprechen, in derselben Höhe über der Horizontalebene. Ebenso sind die gleichen Zeiten, von V angerechnet, entsprechenden Entfernungen GM, GM′ einander gleich (Zus. 1.) und folglich besteht die beschriebene Curve aus zwei gleichen und ähnlichen Bogen VA, VH.

§. 179. Aufgabe. Unter denselben Voraussetzungen zu bestimmen, wo der geworfene Körper eine beliebige durch den Anfangspunkt der Bewegung gehende Ebene trifft.

Es sei AT (Fig. 134.) die Wurfrichtung und AQ die Durchschnittslinie der durch AT gelegten Verticalebene mit der gegebenen Ebene, AH eine Horizontale, $TAH = \alpha$, $QAH = \iota$; also $TAQ = \alpha - \iota$. Ferner sei T die Wurfzeit in Beziehung auf AQ, die Wurf-

weite $AQ = R$ und die Wurfgeschwindigkeit $= V$; so ist, wie im letzten §:

$$AT = T.V,\ TQ = \tfrac{1}{2} g T^2;$$

aber: $$QT : AT = \sin QAT : \sin AQT$$

und: $$\sin AQT = \sin AQH = \cos QAH;$$

folglich: $$QT = AT . \frac{\sin QAT}{\sin AQT} = AT \frac{\sin QAT}{\cos QAH}$$

oder: $$\tfrac{1}{2} g T^2 = T.V . \frac{\sin(\alpha - \iota)}{\cos \iota};$$ folglich $$T = \frac{2V}{g} . \frac{\sin(\alpha - \iota)}{\cos \iota},$$

$$AT = T.V = \frac{2V^2}{g} \frac{\sin(\alpha - \iota)}{\cos \iota}.$$

Dagegen ist: $$AQ : AT = \sin ATQ : \sin AQT$$

und: $$\sin ATQ = \cos TAH;\ \sin AQT = \cos QAH,$$

wie zuvor; folglich:

$$AQ = AT . \frac{\sin ATQ}{\sin AQT} = AT . \frac{\cos TAH}{\cos QAH},$$

oder: $$R = \frac{2V^2}{g} . \frac{\sin(\alpha - \iota)}{\cos \iota} . \frac{\cos \alpha}{\cos \iota} = \frac{2V^2}{g} . \frac{\sin(\alpha - \iota)\cos \alpha}{\cos^2 \iota}.$$

§. 180. Aufgabe. Die Richtung zu finden, nach welcher ein Körper mit einer gegebenen Geschwindigkeit geworfen werden muß, damit die Wurfweite in Beziehung auf eine gegebene Ebene die möglichst größte ist.

In Beziehung auf eine horizontale Ebene ist die Wurfweite $= \frac{V^2}{g} \sin 2\alpha$, und sie wird am größten, wenn $\sin 2\alpha$ am größten ist, d. h. wenn $2\alpha = 90^0$, also $\alpha = 45^0$ ist.

In Beziehung auf eine geneigte Ebene ist die Wurfweite $= \frac{V^2}{g} \frac{2\sin(\alpha - \iota)\cos \alpha}{\cos^2 \iota}$, und da ι constant ist, so wird diese Wurfweite am größten, wenn:

$$2\sin(\alpha - \iota)\cos \alpha$$

am größten ist; aber es ist:

$$2\sin(\alpha - \iota)\cos \alpha = \sin[\alpha + (\alpha - \iota)] - \sin[\alpha - (\alpha - \iota)]$$
$$= \sin(2\alpha - \iota) - \sin \iota,$$

und dieser letzte Werth wird, da ι constant ist, am größten, wenn $\sin(2\alpha - \iota)$ am größten ist, d. h. wenn $2\alpha - \iota = 90^0$, also $\alpha = \frac{1}{2}(90^0 + \iota)$ und $\alpha - \iota = \frac{1}{2}(90^0 - \iota)$, oder $TAQ = \frac{1}{2} ZAQ$, wo

AZ eine Verticale ist. In diesem Falle halbirt also die Linie AT den Winkel ZAQ.

Zusatz. In Beziehung auf die geneigte Ebene ist also die größte Wurfweite

$$= \frac{V^2}{g} \frac{2 \sin(\alpha - \iota) \cos \alpha}{\cos^2 \iota} = \frac{V^2}{g \cos^2 \iota} [\sin(2\alpha - \iota) - \sin \iota]$$

$$= \frac{V^2}{g \cos^2 \iota} [\sin 90^0 - \sin \iota] = \frac{V^2 (1 - \sin \iota)}{g (1 - \sin^2 \iota)} = \frac{V^2}{g (1 + \sin \iota)}.$$

§. 181. Aufgabe. Die Formeln für die Bewegung geworfener Körper durch die der Wurfgeschwindigkeit entsprechende Fallhöhe auszudrücken.

Die der Wurfgeschwindigkeit entsprechende Fallhöhe ist die Höhe, von welcher ein Körper herabfallen muss, damit er diese Geschwindigkeit erlangt. Es sei diese Höhe $= h$, so ist $V^2 = 2gh$, also $h = \frac{V^2}{2g}$, $\frac{V^2}{g} = 2h$, und nach dem vorhergehenden §. ist in Beziehung auf eine Horizontalebene:

Wurfweite $= 2h \sin 2\alpha$,

Wurfzeit $= \sqrt{\frac{2h}{g}} . 2 \sin \alpha$,

Größte Höhe $= h \sin^2 \alpha$,

Größte Wurfweite $= 2h$,

und in Beziehung auf eine geneigte Ebene:

Wurfweite $= 4h \frac{\sin(\alpha - \iota) \cos \alpha}{\cos^2 \iota}$,

$= \frac{2h}{\cos^2 \iota} [\sin(2\alpha - \iota) - \sin \iota]$,

Wurfzeit $= \sqrt{\frac{2h}{g}} . \frac{2 \sin(\alpha - \iota)}{\cos \iota}$,

Größte Wurfweite $= \frac{2h}{1 + \sin \iota}$.

§. 182. Lehrsatz. Die von einem geworfenen Körper beschriebene krumme Linie ist eine Parabel, und die Geschwindigkeit des Körpers in irgend einem Punkte seiner Bahn ist der Geschwindigkeit gleich, welche er erlangen würde, wenn er von der Richtlinie der Parabel bis zu diesem Punkte herabgefallen wäre.

Denn in Fig. 133. ist $AR = V \cdot t$ und $RP = \frac{1}{2} g t^2$, also:

$$\frac{AR^2}{RP} = \frac{2V^2}{g} = 4h, \text{ und } AR^2 = 4h \cdot RP$$

oder, da Am vertical und mP parallel zu AR ist, so hat man:

$$(mP)^2 = 4h \cdot Am;$$

folglich ist die beschriebene Curve AP eine Parabel, deren Abscisse Am, Ordinate mP und Parameter $= 4h$ ist.

Wenn man auf der Verlängerung von mA das Stück AC gleich dem vierten Theile des Parameters nimmt, und auf AC in C das Perpendikel CK errichtet, so ist CK die Richtlinie der Parabel und der vierte Theil des Parameters ist die der Geschwindigkeit entsprechende Höhe h. Folglich ist die Geschwindigkeit im Punkte A gleich der Geschwindigkeit, welche der von der Richtlinie herabgefallene Körper erlangen würde, und die Geschwindigkeit in irgend einem Punkte P ist dieselbe, als wenn dieser Punkt P als der Anfangspunkt der Wurfbewegung betrachtet wird. Folglich ist die Geschwindigkeit in irgend einem Punkte P der Geschwindigkeit gleich, welche der Körper erlangen würde, wenn er durch die Länge DP frei herabgefallen wäre.

Zusatz 1. Offenbar ist AR eine Tangente an der Curve im Punkte A. Nun bildet aber die Tangente an irgend einem Punkte der Parabel mit der von dem Brennpunkte nach dem Berührungspunkte gezogenen geraden Linie und mit den von dem Berührungspunkte auf die Richtlinie gefällten Perpendikel gleiche Winkel. Wenn wir also den Winkel $RAS = RAC$ machen, so liegt der Brennpunkt in der Linie AS, und da die Entfernung eines Punktes der Parabel von dem Brennpunkte, seiner Entfernung von der Richtlinie gleich ist, so ist, wenn man $AS = AC$ nimmt, der Punkt S der Brennpunkt der Parabel.

Zusatz 2. Um den Hauptparameter der Parabel zu finden, ziehe man SK senkrecht auf die Richtlinie, und halbire SK in V, so ist V der Scheitel der Parabel, und $4SV$ oder $2SK$ der Hauptparameter derselben.

Nun ist aber:

$$SK = GK \pm GS = AC + AS \cos SAm = AC - AS \cos SAC$$
$$= AC - AS \cos 2TAC = AC[1 - \cos 2TAC]$$
$$= AC\, 2 \sin^2 . TAC;$$

folglich der Hauptparameter:

$$= 2SK = 4AC \sin^2 TAC = 4h \cos^2 \alpha.$$

§. 183. Aufgabe. Die Gleichung der auf rechtwinklige Coordinaten bezogenen Curve zu finden, wenn die Axe der x horizontal und folglich die der y vertical ist.

In Fig. 133. sei $AM = x$, $MP = y$, t eine beliebige Zeit und die übrigen Bezeichnungen wie vorhin, so ist:

$$AM = AR\cos\alpha, \text{ oder } x = V.t.\cos\alpha; \text{ folglich } t = \frac{x}{V.\cos\alpha},$$

also:
$$RP = \tfrac{1}{2}gt^2 = \frac{gx^2}{2V^2\cos^2\alpha},$$

und:
$$MR = AM\,\mathrm{tang}\,\alpha,\ MP = MR - RP;$$

folglich ist:
$$y = x\,\mathrm{tang}\,\alpha - \frac{gx^2}{2V^2\cos^2\alpha}$$

die Gleichung der Curve.

Zusatz 1. Wenn, wie vorhin, $h = \frac{V^2}{2g}$ ist, so ist:

$$y = x\,\mathrm{tang}\,\alpha - \frac{x^2}{4h\cos^2\alpha}.$$

Zusatz 2. Für den Punkt, wo die Curve die Horizontalebene trifft, muss

$$y = o, \text{ also } x\,\mathrm{tang}\,\alpha - \frac{x^2}{4h\cos^2\alpha} = o$$

sein, welche Gleichung für zwei Werthe von x erfüllt wird, nämlich für den Werth $x = o$, welcher sich auf den Punkt A bezieht und für den Werth:

$$\mathrm{tang}\,\alpha - \frac{x}{4h\cos^2\alpha} = o,$$

woraus:

$$x = 4h\,\mathrm{tang}\,\alpha.\cos^2\alpha = 4h\sin\alpha\cos\alpha = 2h\sin 2\alpha$$

folgt, welches mit §. 181. übereinstimmt.

§. 184. Aufgabe. Den Winkel zu finden, welchen die Curve an irgend einem Punkte mit dem Horizonte bildet.

Die horizontale Geschwindigkeit, mit welcher sich P oder M bewegt, ist immer dieselbe und $= V\cos\alpha$. Die verticale Geschwindigkeit von P ist die Geschwindigkeit, mit welcher MP oder $MR - RP$ zunimmt, d. h. die Geschwindigkeit, mit welcher MR wächst, weniger der Geschwindigkeit, mit welcher RP zunimmt. Die erste dieser Geschwindigkeiten ist aber nach dem vorhergehenden Kapitel $= V\sin\alpha$,

und die letzte $= g\,t$; folglich die verticale Geschwindigkeit $= V \sin\alpha - g\,t$. Wenn also φ den Winkel bezeichnet, welchen die Curve im Punkte P mit dem Horizonte bildet, so ist:

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{\text{Verticale Geschwindigkeit}}{\text{Horizontale Geschwindigkeit}} = \frac{V\sin\alpha - g\,t}{V\cos\alpha} = \text{tang}\,\alpha - \frac{g\,t}{V\cos\alpha}$$

$$= \text{tang}\,\alpha - \frac{g\,x}{V^2\cos^2\alpha} = \text{tang}\,\alpha - \frac{x}{2\,h\cos^2\alpha} \quad (\S.\ 183.).$$

Zusatz. Es lässt sich auch leicht der Punkt V (Fig. 134.) bestimmen, in welchem der Körper die größte Höhe über einer gegebenen Ebene AQ erreicht hat. Denn in diesem Punkte muss die Richtung der Bewegung offenbar zu AQ parallel, also $\text{tang}\,\varphi = \text{tang}\,\iota$ sein. Es ist aber:

$$\text{tang}\,\iota = \text{tang}\,\alpha - \frac{x}{2\,h\cos^2\alpha};$$

$$\frac{x}{2\,h\cos^2\alpha} = \text{tang}\,\alpha - \text{tang}\,\iota = \frac{\sin a}{\cos\alpha} - \frac{\sin\iota}{\cos\iota}$$

$$= \frac{\sin(\alpha-\iota)}{\cos\alpha\,.\,\cos\iota};$$

also: $$AL = x = 2\,h\,\frac{\sin(\alpha-\iota)\cos\alpha}{\cos\iota}$$

und: $$AG = \frac{AL}{\cos\iota} = 2\,h\,\frac{\sin(\alpha-\iota)\cos\alpha}{\cos^2\iota}.$$

Vergleicht man diesen Werth mit dem der Wurfweite AQ in §. 181., so sieht man, dass $AG = \frac{1}{2}AQ$ ist.

§. 185. Aufgabe. Es wird ein Körper von einem gegebenen Punkte aus mit einer gegebenen Geschwindigkeit so geworfen, dass er durch einen andern gegebenen Punkt geht, und man soll die Wurfrichtung finden.

Es sei Q (Fig. 134.) der Punkt, durch welchen der geworfene Körper geht, so ist AQ und der Winkel QAH, wie vorhin, bekannt, und wenn man $AQ = R$, $QAH = \iota$ setzt; so ist nach §. 179 und 181:

$$R = \frac{2\,V^2}{g}\,.\,\frac{\sin(\alpha-\iota)\cos\alpha}{\cos^2\iota} = \frac{2\,h}{\cos^2\iota}\,[\sin(2\,\alpha-\iota) - \sin\iota];$$

also: $$\sin(2\,\alpha-\iota) = \frac{R\cos^2\iota}{2\,h} + \sin\iota.$$

Wenn die Aufgabe möglich ist, so gibt diese Gleichung für $2\,\alpha - \iota$ einen Werth ω, welcher kleiner ist als 90^0, und da $\sin(180^0 - \omega)$

$= \sin \omega$ ist, so geschieht dieser Gleichung auch durch den Werth $180^0 - \omega$ von $2\alpha - \iota$ genüge.

Es seien daher α', α'' die beiden entsprechenden Werthe von α, d. h.:

$$2\alpha' - \iota = \omega, \quad 2\alpha'' - \iota = 180^0 - \omega,$$

oder: $$\alpha' = \frac{\omega + \iota}{2}, \quad \alpha'' = \frac{180^0\ \omega + \iota}{2},$$

welche beiden Werthe in der Formel:

$$\tfrac{1}{2}(90^0 + \iota) \pm \tfrac{1}{2}(90^0 - \omega)$$

enthalten sind.

Wenn die Linie AI den Winkel QAZ halbirt, so ist der Winkel $IAH = \iota + \frac{1}{2}(90^0 - \iota) = \frac{1}{2}(90^0 + \iota)$. Wenn also TAH, tAH (Fig. 134.) die beiden Werthe von α sind, welche die Formel gibt, so bilden die gesuchten Wurfrichtungen AT und At mit AI gleiche Winkel.

Es lassen sich auch leicht die Grenzen angeben, innerhalb welcher die Aufgabe möglich ist. Sie ist nämlich unmöglich, wenn $\sin(2\alpha - \iota) > 1$, d. h. wenn:

$$\frac{R \cos^2 \iota}{2h} + \sin \iota > 1$$

ist, welches stattfinden kann, wenn entweder R oder V zu groß und folglich h zu klein wird.

Diese Aufgabe hätte auch dadurch aufgelöst werden können, dass man für x und y die bekannten Werthe von AN, NQ in die Gleichung der Curve setzte, worin alsdann der Winkel α, welcher die Richtung des Wurfes bestimmt, die einzige unbekannte Größe ist, und folglich daraus gefunden werden kann.

Es lässt sich auch nach den Eigenschaften der Parabel eine geometrische Construction angeben, wodurch die Aufgabe gelöst wird.

§. 186. Aufgabe. Es wird ein Körper nach einer gegebenen Richtung und mit einer gegebenen Geschwindigkeit von der Spitze eines senkrechten Paraboloides aus geworfen, und man soll den Punkt bestimmen, wo er das Polobolid trifft.

Es sei AQ (Fig. 135.) der Durchschnitt der Oberfläche des Paraboloides mit der durch die Wurfrichtung gelegten Verticalebene, so ist AQ eine Parabel, und wenn wir diese Curve AQ auf rechtwinklige Coordinaten x, y beziehen, indem die Axe der x horizontal und

die der y vertical ist, so ist die Gleichung derselben, wenn b den Parameter bezeichnet:

$$y = -\frac{x^2}{b},$$

weil y negativ ist, wenn die positiven Ordinaten aufwärts gezählt werden. In dem Punkte Q, wo der geworfene Körper das Paraboloid trifft, müssen die Parabel AQ und die von dem Körper beschriebene Parabel dieselben Coordinaten haben. Setzen wir also diesen Werth von y dem Werthe der Ordinate der Curve APQ in §. 183. gleich, so erhalten wir:

$$-\frac{x^2}{b} = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{x^2}{4 h \cos^2 \alpha},$$

$$\frac{x}{4 h \cos^2 \alpha} - \frac{x}{b} = \operatorname{tang} \alpha;$$

$$x = \frac{4 b h \sin \alpha \cos \alpha}{b - 4 h \cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{2 b h \sin 2\alpha}{b - 4 h \cos^2 \alpha}.$$

Wenn $4 h \cos^2 \alpha = b$ oder $2 V^2 \cos^2 \alpha = b g$ ist, so wird x unendlich groß, und der Körper trifft das Parabolid oder die Parabel AQ nirgends. In diesem Falle haben die beiden Parabeln nach §. 182. gleiche Parameter, und sind zu einander parallel, und wenn endlich b kleiner ist als dieser Werth, so divergiren diese beiden Parabeln und schneiden sich nirgends.

Auf dieselbe Weise kann man bestimmen, wo ein unter gegebenen Umständen geworfener Körper irgend eine durch ihre Gleichung gegebene Curve trifft.

§. 187. Aufgabe. Es wird ein Körper mit einer gegebenen Geschwindigkeit von einem gegebenen Punkte ausgeworfen, und man soll die Richtung des Wurfes so bestimmen, dass die Bahn des geworfenen Körpers eine gegebene Ebene eben berührt.

Es sei Bb (Fig. 135.) der Durchschnitt der gegebenen Ebene mit der durch die Richtung des Wurfes gelegten Verticalebene, wo Bb nothwendig über A liegen muss. Ferner sei $AB = b$ und Winkel $ABb = \beta$, so ist die Gleichung der geraden Linie Bb:

$$y = (x + b) \operatorname{tang} \beta,$$

und die Gleichung der von dem Körper beschriebenen Parabel:

$$y = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{x^2}{4 h \cos^2 \alpha}.$$

Aber da die Coordinaten dieser beiden Linien für den Berührungspunkt P dieselben sein müssen, so haben wir die Gleichung:

$$(x+b)\,\text{tang}\,\beta = x\,\text{tang}\,\alpha - \frac{x^2}{4\,h\cos^2\alpha},$$

und da sich beide Linien im Punkte P berühren, so muss die Tangente des Winkels, welchen beide mit der Horizontalrichtung bilden, für beide denselben Werth haben.

Nun ist aber für die gerade Linie Bb dieser Werth $=\text{tang}\,\beta$, und für die parabolische Bahn des geworfenen Körpers nach §. 184.

$$=\text{tang}\,\alpha - \frac{x}{2\,h\cos^2\alpha};$$

folglich:

$$\text{tang}\,\beta = \text{tang}\,\alpha - \frac{x}{2\,h\cos^2\alpha}.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass:

$$x = 2\,h\cos^2\alpha\,(\text{tang}\,\alpha - \text{tang}\,\beta)$$

$$= \frac{2\,h\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta}$$

ist, und wenn man diesen Werth in die vorhergehende Gleichung oder in:

$$b\,.\,\text{tang}\,\beta = x\,(\text{tang}\,\alpha - \text{tang}\,\beta) - \frac{x^2}{4\,h\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{x\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{x^2}{4\,h\cos^2\alpha}$$

substituirt; so findet man:

$$b\,\text{tang}\,\beta = \frac{2\,h}{\cos^2\beta}\sin^2(\alpha-\beta) - \frac{h}{\cos^2\beta}\sin^2(\alpha-\beta)$$

$$= \frac{h}{\cos^2\beta}\sin^2(\alpha-\beta);$$

also:

$$\sin(\alpha-\beta) = \pm\,.\,\frac{(b\sin\beta\cos\beta)^{\frac{1}{2}}}{h^{\frac{1}{2}}} = \pm\left[\frac{b\sin 2\beta}{2\,h}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Aus dieser letzten Gleichung erhellet, dass es zwei Richtungen gibt, welche den Bedingungen der Aufgabe genügen, und wenn man Aa parallel zu Bb zieht, so bilden diese Richtungen mit Aa gleiche Winkel $aAT = aAt$. Fast auf dieselbe Weise lässt sich bestimmen, wo die Bahn des geworfenen Körpers eine gegebene Curve berührt.

§. 188. Aufgabe. Wenn von demselben Punkte A (Fig. 136.) mehrere Körper mit derselben Geschwindigkeit nach verschiedenen Richtungen geworfen werden,

den geometrischen Ort der Punkte zu bestimmen, worin sie sich am Ende einer gegebenen Zeit befinden.

Es seien AR, AR′, AR″ die Richtungen, nach welchen die Körper geworfen werden, $AR = AR' = AR''$ der Raum, welchen jeder Körper in irgend einer Zeit mit der gleichförmigen Wurfgeschwindigkeit beschreiben und $RP = R'P' = R''P''$ der Raum, durch welchen jeder Körper vermöge der Wirkung der Schwere in derselben Zeit fallen würde; so ist nach dem Bisherigen klar, dass P, P′, P″ die Oerter sind, wo sich die Körper am Ende dieser Zeit befinden.

Es sei AM vertical und $= RP$, so ist $MP = AR$, $MP' = AR'$, $MP'' = AR''$; folglich $MP = MP' = MP''$ und mithin liegen die Punkte P, P′, P″ alle auf einem Kreisumfange, dessen Mittelpunkt M und dessen Halbmesser MP ist. Der Mittelpunkt dieses Kreises fällt nach demselben Gesetze wie ein schwerer Körper, und der Halbmesser desselben nimmt gleichförmig zu.

Zusatz. Wenn die Wurfrichtungen in verschiedenen Verticalebenen liegen, so befinden sich alle Körper in einem gegebenen Zeitpunkte auf einer Kugeloberfläche.

§. 189. Aufgabe. Unter derselben Voraussetzung den geometrischen Ort der Scheitel der beschriebenen Parabeln zu finden.

Es sei V der Scheitel irgend einer der Parabeln, $AU = p$, $VU = q$ resp. die verticalen und horizontalen Coordinaten, so ist klar, dass $UV = AG = \frac{1}{2}AH$ ist, wo AH die horizontale Wurfweite ist, und dass $AU = GV =$ der größten Höhe des Körpers über die Horizontalebene ist.

Wenn also h die der Wurfgeschwindigkeit entsprechende Fallhöhe und α der Winkel ist, welchen die Wurfrichtung mit dem Horizonte bildet, so ist nach §. 181:

$$q = h \sin 2\alpha = 2h \sin\alpha \cos\alpha,\quad p = h \sin^2\alpha;$$

also:
$$\sin^2\alpha = \frac{p}{h};\quad q^2 = 4h^2 . \sin^2\alpha . \cos^2\alpha$$
$$= 4h^2 \sin^2\alpha (1 - \sin^2\alpha)$$
$$= 4h^2 \left(1 - \frac{p}{h}\right)$$
$$= 4(hp - p^2),$$

und wenn $k = \frac{h}{2}$, also $h = 2k$ und $\frac{h^2}{k^2} = 4$ ist, so hat man:

$$q^2 = \frac{h^2}{k^2}(2kp - p^2),$$

welches die Gleichung einer Ellipse ist, deren kleine Axe $= 2k = AC$ = der der Wurfgeschwindigkeit entsprechenden Fallhöhe und deren große Axe horizontal und $= 2h$ oder doppelt so groß als die kleine ist.

§. **190.** Aufgabe. Wenn durch einen Punkt A in beliebigen Richtungen Ebenen AQ, AQ′, AQ″ (Fig. **137.**) gelegt und mit einer gegebenen Geschwindigkeit von dem Punkte A aus Körper unter solchen Richtungen geworfen werden, daß die Wurfweiten in Beziehung auf jede dieser Ebenen die möglichst größten sind, den geometrischen Ort der Punkte Q, Q′, Q″ zu finden.

Wenn der Winkel $HAQ = \iota$ und $CAQ = \omega$ gesetzt wird, so ist nach §. **181**:

$$AQ = \frac{2h}{1+\sin\iota} = \frac{2h}{1+\cos\omega},$$

und dieses ist die Gleichung einer Parabel, deren Parameter $= 4h$ ist; folglich liegen die Punkte Q, Q′, Q″ in einer Parabel, deren Brennpunkt A ist.

Zusatz **1.** Diese Parabel umschließt alle Parabeln, welche die vom Punkte A aus mit der Geschwindigkeit $V = \sqrt{2gh}$ geworfenen Körper beschreiben; denn diese Parabeln treffen diese Curve in irgend einem Punkte und gehen durch keinen Punkt, welcher außerhalb des von ihr eingeschlossenen Raumes liegt, wie sich ergibt, wenn man einen solchen Punkt mit dem Punkte A verbindet.

Zusatz **2.** Wir haben bereits gesehen, daß die Linie AR den Winkel CAQ halbirt; folglich liegt der Brennpunkt S von AVQ in AQ und mithin haben die Parabeln AVQ, CQ in Q eine gemeinschaftliche Tangente; denn die Tangente muß den Winkel AQq halbiren, wenn Qq zu der Axe parallel ist. Folglich berührt die Parabel CQQ′Q″ alle Parabeln, welche die mit der Geschwindigkeit V aus dem Punkte A geworfenen Körper beschrieben.

Zusatz **3.** Wenn die Wurfrichtungen der verschiedenen Körper in verschiedenen Verticalebenen liegen, so werden die von diesen Körpern beschriebenen Parabeln alle von einem parabolischen Kegel umschlossen, welcher durch die Umdrehung von QA um CA erzeugt wird.

Fünftes Kapitel.

Bewegung auf einer Curve.

§. **191.** Wenn sich ein Körper längs einer Curve fortbewegen muß, so erfährt er in jedem Punkte derselben eine Reaction, welche auf

der Curve und folglich auf der Richtung seiner Bewegung senkrecht ist. Diese Kraft kann also die Geschwindigkeit des Körpers weder verzögern, noch beschleunigen und um die Geschwindigkeit des Körpers zu bestimmen, muss man die nach der Richtung der Curve zerlegte, auf den Körper wirkende Kraft und die dadurch hervorgebrachte Wirkung betrachten.

Lehrsatz. Wenn ein Körper vermöge der Wirkung der Schwere auf irgend einer Curve herabfällt, so ist die in irgend einem Punkte erlangte Geschwindigkeit dieselbe, als wenn der Körper um dieselbe verticale Höhe frei herabgefallen wäre.

Es sei PQ (Fig. 138.) die betrachtete Curve, längs welcher der Körper von einem Punkte P, wo er irgend eine Geschwindigkeit hat, bis zu dem Punkte Q herabfällt. Es seien PM, QN horizontale Linien, welche eine Verticale in M und N schneiden, und ein Körper, welcher in M dieselbe Geschwindigkeit hat, als der Körper in P, falle von M bis N; so wird behauptet, dass der von M bis N frei herabfallende Körper in N dieselbe Geschwindigkeit erlangt hat, als der auf der Curve herabgefallene Körper in Q.

Um dieses zu beweisen, wollen wir uns den Bogen PQ in kleine Theile PP′, P′P″, ... getheilt vorstellen, und es seien MM′, M′M″, ... die correspondirenden Theile von MN. Ferner wollen wir annehmen, dass die auf den Körper wirkende beschleunigende Kraft während der Bewegung durch PP′ dieselbe Größe wie in P, während der Bewegung durch P′P″ dieselbe Größe wie in P′, etc. behält; so nähert sich die Geschwindigkeit, welche der Körper unter dieser Voraussetzung in Q erlangt hat, der unter der Wirkung der Schwerkraft während des Falles durch den Bogen PQ in Q wirklich erlangten Geschwindigkeit, desto mehr, je kleiner die Theile PP′, ... sind, und je größer ihre Anzahl ist.

Es sei PT eine Tangente im Punkte P der Curve, welche M′P′ in T schneidet, und TG sei ein Perpendikel in T auf PT, welches die Verticale PG in G schneidet. Wenn PG die Schwerkraft in P ausdrückt, so kann man sich dieselbe in die beiden Kräfte PT, TG zerlegt denken, wovon TG durch den Widerstand der Curve aufgehoben wird, und blos PT die Beschleunigung des Körpers längs der Curve im Punkte P zu bewirken strebt, so dass, wenn g die Schwerkraft bezeichnet, $g.\frac{PT}{PG}$ die in P wirkende beschleunigende Kraft ausdrückt, und wenn U der Durchschnittspunkt von MT und PG ist; so verhält sich:

$$PU:PT=PT:PG;$$

folglich ist $g.\frac{PU}{PT}$ oder $g.\frac{MM'}{PT}$ die in P nach der Richtung der Curve wirkende Kraft.

Wenn die Kraft in PP', P'P'', ... gleichförmig wirkt, so sei u die Geschwindigkeit in P, u' die in P', u'' die in P'', ... und v die in Q, so ist nach §. 162. Zus. 3., wenn die Kraft f gleichförmig von P bis P' wirkt:

$$u'^2 - u^2 = 2f.PP' = 2g.\frac{PP'.MM'}{PT},$$

und ebenso:

$$u''^2 - u'^2 = 2f'.P'P'' = 2g.\frac{P'P''.M'M''}{P'T'},$$

. . . . . .

Addirt man alle diese Gleichungen zusammen, und bemerkt, dass v die letzte der Geschwindigkeiten u, u', u'', ... ist, so erhält man:

$$v^2 - u^2 = 2g\left[MM'.\frac{PP'}{PT} + M'M''.\frac{P'P''}{P'T'} + \text{etc.}\right],$$

und je kleiner die Theile PP', P'P'', ... angenommen werden, desto mehr nähert sich die so erzeugte Geschwindigkeit der längs der Curve wirklich erlangten, und desto mehr nähert sich zu gleicher Zeit jeder der Brüche $\frac{PP'}{PT}, \frac{P'P''}{P'T'}$ ... der Einheit. Nimmt man also die Grenzen und betrachtet v und u als die wirklichen Geschwindigkeiten in Q und P, so erhält man:

$$v^2 - u^2 = 2g[MM' + M'M'' + \text{etc.}] = 2g.MN$$

und: $$v^2 = u^2 + 2g.MN.$$

Dieses ist aber nach §. 162. der Werth des Quadrates der Geschwindigkeit, welche der Körper erlangt, wenn er von M, wo er bereits die Geschwindigkeit u hatte, bis N frei herabfällt, und folglich sind die während des Falles durch MN und PQ erlangten Geschwindigkeiten einander gleich.

Zusatz 1. Derselbe Satz gilt für jede andere Kraft, welche nach parallelen Richtungen auf den Körper wirkt, während er sich auf der Curve bewegt. Wenn für irgend einen Punkt der Curve f die Kraft, u die Geschwindigkeit und für einen andern Punkt v die Geschwindigkeit und h die Entfernung der beiden Punkte, nach der Richtung der Kraft gemessen, bezeichnen; so ist:

$$v^2 = u^2 + 2fh.$$

Zusatz 2. Wenn ein Körper in Q sich mit derselben Geschwin-

digkeit in der Curve QP zu bewegen anfängt, mit welcher ein anderer Körper in N vertical aufwärts geworfen wird, so haben beide in P und M dieselbe Geschwindigkeit; denn die während des Aufsteigens in QP aufgehobene Geschwindigkeit ist der während des Herabfallens längs PQ erlangten Geschwindigkeit, d. h. der bei dem freien Falle durch MN erlangten und folglich auch der während des Aufsteigens durch NM aufgehobenen Geschwindigkeit gleich.

Zusatz 3. Wenn ein Körper auf einer gegebenen krummen Fläche mit einer gewissen Geschwindigkeit anfängt, aufwärts zu steigen, so steigt er immer bis zu derselben Höhe über die durch seine anfängliche Lage gelegte Horizontalebene, welche Form die krumme Fläche auch haben mag; denn in jedem Falle steigt er zu derselben Höhe auf, als wenn er mit derselben anfänglichen Geschwindigkeit senkrecht in die Höhe geworfen würde.

§. 192. Aufgabe. Die Zeit zu bestimmen, während welcher ein schwerer Körper durch irgend einen Bogen einer umgekehrten Cycloide fällt.*)

---

*) Wenn ein Kreis EPF (Fig. 140. und 141.) in derselben Ebene auf einer geraden Linie CBc fortrollt, so beschreibt ein in seinem Umfange liegender Punkt P eine Curve, welche die Cycloide genannt wird.

Wenn der Kreis eine vollständige Umwälzung gemacht hat, so hat der betrachtete und zuerst in dem Berührungspunkte C liegende beschreibende Punkt die Curve CPAc beschrieben und fällt wieder mit einem Punkte c der geraden Linie zusammen. Wenn man Cc in B halbirt, und darauf das Perpendikel BA errichtet, so ist A die Lage des beschreibenden Punktes, wenn der Kreis eine halbe Umwälzung gemacht hat, und die beiden Curvenzweige AC, Ac sind einander gleich und ähnlich. Das Perpendikel AB heißt die Axe, die gerade Linie Cc die Basis, der Punkt A der Scheitel und der Kreis AQB der Erzeugungskreis der Cycloide.

Lehrsatz 1. Wenn irgend eine auf der Axe der Cycloide senkrechte Ordinate MQP gezogen wird, so ist QP = Bogen QA.

Denn es sei EPF die Lage des Erzeugungkreises, wenn sich der beschreibende Punkt in P befindet, so ist während des Fortrollens des erzeugenden Kreises jeder Punkt des Bogens BF mit einem Punkte von CF zusammengefallen; folglich ist CF = Bogen PF = Bogen QB. Ebenso ist jeder Punkt von CB mit einem Punkte von AQB zusammengefallen; also CB = Bogen AQB; folglich FB = Bogen AQ. Aber es ist offenbar PN = QM, und daher PQ = NM = FB, also PQ = Bogen AQ.

Lehrsatz 2. Die Tangente in einem Punkte P (Fig. 140.) einer Cycloide ist zu der Sehne AQ parallel.

Denn wenn man für den Augenblick annimmt, dass sich der Erzeugungskreis EPF um einen festen Punkt F drehet, statt längs FB fortzurollen, so ist die Richtung der Bewegung von P im ersten Augenblicke für beide Fälle die-

Es sei A (Fig. 139.) der Scheitel der Cycloide, und L der Punkt, von welchem der Körper anfängt zu fallen, L H eine Horizontallinie, welche die Axe der Cycloide in H schneidet und P M eine horizontale Linie, welche den über A H beschriebenen Halbkreis in q schneidet, so

---

selbe; aber im ersten Falle ist die Bewegung von P offenbar senkrecht auf F P, oder erfolgt in der Richtung P E. Folglich ist P E die Richtung der Curve C P in P und mithin P E eine Tangente. Aber P E ist parallel zu Q A und folglich die Tangente in P parallel zu Q A.

Lehrsatz 3. Die Länge des von dem Scheitel A der Cycloide anfangenden Bogens A P derselben ist doppelt so groß, als die Sehne des Kreisbogens A Q, welcher von derselben Ordinate, wie der Cycloidenbogen, abgeschnitten wird.

Es sei M′ Q′ P′ (Fig. 140.) eine der Ordinate M Q P sehr nahe liegende Ordinate, A Q schneide M′ Q′ in R und man ziehe in Q eine Tangente an den Kreis, welche M′ Q′ in S schneidet, und die Tangente in dem Punkte A in T, und endlich ziehe man S O senkrecht auf Q R; so ist, da T A = T Q ist, Winkel T A Q = T Q A; ferner T A Q = Q R S und T Q A = R Q S; folglich Q R S = R Q S und S Q = S R; folglich sind die Dreiecke S O Q und S O R einander gleich; also Q O = R O und Q R = 2 Q O. Nähert sich nun der Punkt Q′ dem Punkte Q ohne Ende, so nähert sich der Punkt S auch dem Punkte Q′ ohne Ende, und O S fällt zuletzt mit einem Kreisbogen zusammen, dessen Halbmesser A Q′ und dessen Mittelpunkt A ist. Folglich ist zuletzt Q O der Ueberschuss von B Q′ über A Q oder die Größe, um welche A Q zugenommen hat. Ferner ist Q R parallel zu der Tangente in P und folglich ist Q R zuletzt gleich P P′, d. h. der Größe, um welche A P zugenommen hat. Hieraus erhellet, dass für correspondirende Punkte A P um eine doppelt so große Größe zugenommen hat, als A Q, und folglich ist, da A P und A Q gleichzeitig anfangen, A P immer doppelt so groß als die Sehne A Q.

Zusatz. Auch ist A P = 2 P E.

Aufgabe. Ein Pendel zu construiren, welches in einer gegebenen Cycloide schwingt.

Es sei A P C (Fig. 141.) eine gegebene halbe Cycloide und A B ihre Axe. Man verlängere A B bis S, nehme S B = A B, ergänze das Rechteck S B C D und beschreibe mit der Axe C D und der Basis D S eine halbe Cycloide C S. Ferner ziehe man irgend eine Linie E F G parallel zu A B S und auf entgegengesetzten Seiten derselben beschreibe man die beiden Halbkreise E P F, F O G, welche zu den Erzeugungskreisen der beiden halben Cycloiden A C, C S gehören, und endlich ziehe man O F, F P; so ist Bogen F P = F C und Bogen F P E = B F C; folglich Bogen P E = B F und B F = S G = Bog. G O. Folglich ist P E = G O; also Winkel E F P = G F O; mithin O T P eine gerade Linie; ferner O F = F P; folglich O P = 2 O F = Bogen O C (Lehrsatz 3. Zus.) und O P ist eine Tangente an der Cycloide in Q. Wenn also ein auf die halbe Cycloide S O C gewickelter und an einem festen Punkte S befestigter Faden an dem Ende C von derselben abgewickelt wird, so beschreibt der Endpunkt C eine halbe Cycloide C P A, und wenn eine

ist die in P längs LP erlangte Geschwindigkeit der längs HM erlangten Geschwindigkeit nach §. 191. gleich. Folglich ist:

$$\text{Geschwindigkeit in } P = \sqrt{2g.HM}$$

$$= \sqrt{2g.\frac{Hq^2}{AH}} = Hq.\sqrt{\frac{2g}{AH}}.$$

Ferner ist, wenn AQB ein über AB beschriebener Halbkreis ist, $AP = 2$. Sehne AQ (s. Note), also:

$$AP = 2\sqrt{AB.AM}$$

$$2 = \sqrt{\frac{AB}{AH}.AH.AM} = 2\sqrt{\frac{AB}{AH}Aq^2}$$

$$= 2Aq\sqrt{\frac{AB}{AH}},$$

und ebenso ist, wenn P'M' nahe und parallel PM ist:

$$AP' = 2Aq'\sqrt{\frac{AB}{AH}};$$

folglich: $$PP' = 2(Aq - Aq')\sqrt{\frac{AB}{AH}}.$$

Wenn also PP' gleichförmig mit der Geschwindigkeit in P beschrieben wird, so ist die Fallzeit in $PP' = \frac{PP'}{\text{Geschw. in P}} = \frac{Aq - Aq'}{Hq}\sqrt{\frac{2AB}{g}}$, und wenn man PP' ohne Ende abnehmen lässt, so nähert sich die Summe aller solcher Fallzeiten von L bis P der wirklichen Fallzeit durch LP ohne Ende. Zieht man nun Hq', welche Aq in o schneidet, so nähert sich oq der Größe $Aq - Aq'$, weil sich der Winkel AoH dem rechten Winkel AqH nähert, und wenn man folglich die Grenze nimmt; so erhält man:

$$\text{Fallzeit in } PP' = \frac{oq}{Hq}\sqrt{\frac{2AB}{g}}$$

$$= \text{Winkel } qHo\sqrt{\frac{2AB}{g}},$$

---

gleiche und ähnliche halbe Cycloide Sc, mit ihrer Basis Sd mit DS in dieselbe gerade Linie gelegt wird; so beschreibt der Endpunkt des in S befestigten Fadens, indem sich dieser auf die halbe Cycloide Sc abwickelt, die andere Hälfte der Cycloide CAc. Wenn also an dem Faden SOP zwischen zwei solchen in einer Verticalebene befindlichen halben Cycloiden ein Körper P aufgehangen ist, und aus der Lage des Gleichgewichtes entfernt wird, so schwingt er in einer umgekehrten Cycloide.

und da Winkel $qHo = qHq' = \frac{1}{2}qCq'$ ist, so hat man:

$$\text{Fallzeit in } PP' = \tfrac{1}{2}qCq'\sqrt{\frac{2AB}{g}}.$$

Die ganze Fallzeit in LP wird aber gefunden, wenn man die Summe solcher Zeitintervalle zwischen L und P nimmt, und da die Summe aller Winkel, wie qCq' offenbar $= HCq$ ist, so erhält man:

$$\text{Fallzeit in } LP = \tfrac{1}{2}HCq.\sqrt{\frac{2AB}{g}}.$$

Zusatz 1. Um die Fallzeit durch den ganzen Bogen LA zu erhalten, muss man für den Winkel HCq den diesem Falle entsprechenden Werth $= 180^0 = \pi$ setzen, und man erhält alsdann:

$$\text{Fallzeit in } LA = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2AB}{g}}.$$

Zusatz 2. Wenn der Körper, nachdem er in dem Scheitel B angelangt ist, auf der andern Hälfte der Cycloide aufsteigt, so gelangt er bis zu einem Punkte l, für welchen $Al = AL$ ist, und die Zeit des Aufsteigens längs Al ist der des Herabfallens längs LA gleich.

Es ist also:

$$\text{Zeit in } LAl = 2.\text{Zeit in } LA = \pi\sqrt{\frac{2AB}{g}}.$$

Zusatz 3. Da die Fallzeit durch LA unabhängig von der Lage des Punktes L ist, so ist einleuchtend, dass die Fallzeit durch den Bogen LA immer dieselbe ist, wie groß oder klein er auch sein mag, und deswegen sagt man, die Curve CA sei isochronisch.

§. 193. Aufgabe. Wenn ein Körper in einer Cycloide schwingt, die Schwingungszeit zu bestimmen.

Wenn zwei umgekehrte halbe Cycloiden SC, Sc (Fig. 141.) in einer Verticalebene mit einander in einem Punkte S in Berührung gebracht werden, und an einem in S befestigten Faden SOP, dessen Länge der Länge einer der halben Cycloiden gleich ist, ein Körper P aufgehangen ist; so beschreibt derselbe eine Cycloide CAc (s. Note zu §. 192.), und er bewegt sich folglich ganz ebenso wie auf der Curve PAp; nämlich, nachdem er längs LA herabgefallen ist, steigt er vermöge der erlangten Geschwindigkeit auf der andern Seite wieder auf und beschreibt einen AL gleichen und ähnlichen Bogen Al, und nachdem er in l angelangt ist, fällt er wieder längs lA herab und steigt nach AL auf, u. s. f.

Es sei l die Länge des Pendels SA, so ist $l = 2AB$ und die Schwingungszeit ist nach dem vorhergehenden §:

$$= \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Zusatz 1. Da $\sqrt{\frac{l}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times \frac{1}{2} l}{g}} =$ der Fallzeit durch $\frac{1}{2} l$ ist (§. 162.), so ist die Schwingungszeit $= \pi$ multiplicirt mit der Fallzeit durch die halbe Pendellänge.

Zusatz 2. Für sehr kleine Entfernungen von dem Punkte A fällt die Cycloide fast mit dem Kreise zusammen, dessen Mittelpunkt in S liegt. Die Bewegung eines Cycloidenpendels SOP stimmt daher fast mit der Bewegung eines an einem Faden SA aufgehangenen und in sehr kleinen Kreisbogen frei schwingenden Körpers überein, so dass man in diesem Falle die Schwingungszeiten beider Pendel als gleich betrachten kann.

Es lassen sich also alle Umstände der Schwingungen eines Pendels in sehr kleinen Kreisbogen aus dem obigen Ausdrucke:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

wo t die Schwingungszeit bezeichnet, bestimmen.

Zusatz 3. Offenbar ändert sich t wie die Quadratwurzel aus l, wenn g constant bleibt. Ferner ändert sich t umgekehrt wie die Quadratwurzel aus g, wenn l denselben Werth behält und g ändert sich umgekehrt wie l, wenn t ungeändert bleibt.

Wenn also L die Länge eines Secundenpendels, d. h. welches seine Schwingungen in 1 Sec. macht, und t die Schwingungszeit eines Pendels von der Länge l in Secunden ausdrückt, bezeichnet, so ist:

$$t = \sqrt{\frac{l}{L}} \text{ und } l = L t^2.$$

Die Länge L des Secundenpendels ist unter der geographischen Breite von London und im leeren Raume $= 39{,}1386$ engl. Zoll durch Beobachtung gefunden und aus diesem Werthe von L lässt sich der von g leicht finden. Denn setzt man $t = 1$, so hat man:

$$1 = \pi \sqrt{\frac{L}{g}}; \text{ also } g = \pi^2 L = 386{,}28 \text{ engl. Zoll.}$$

Beispiel 1. Die Schwingungszeit eines Pendels von 20 Fuß Länge zu finden.

Es ist:

$$t = \sqrt{\frac{240}{39{,}1386}} = 2{,}5 \text{ Sec. näherungsweise.}$$

Beispiel 2. Die Länge eines Pendels zu finden, welches seine Schwingungen in halben Minuten macht.

Es ist:

$$l = L(30)^2 = 39{,}1386 \times 900 \text{ engl. Zoll} = 978{,}4 \text{ Ellen.}$$

§. 194. Aufgabe. Wenn sich die Länge eines Secundenpendels etwas verändert, die Anzahl der Schwingungen zu finden, welche es alsdann während eines Tages mehr oder weniger macht.

Es sei n die tägliche Anzahl der Schwingungen des Pendels unter der geogrophischen Breite von London im leeren Raume und $N = 24 \times 60 \times 60 = 86400$ die Anzahl der in 24 Stunden enthaltenen Secunden; so hat man:

$$t = \frac{N}{n}; \text{ also } \frac{N}{n} = \sqrt{\frac{l}{L}} \text{ und } l = \frac{L N^2}{n^2}$$

Wenn n und l resp. fast $= N$ und L sind, so lassen sich die Differenzen leicht näherungsweise erhalten. Nimmt z. B. die Länge L des Secundenpendels um eine kleine Größe p zu, so lässt sich leicht die Anzahl q der Secunden finden, welche es alsdann täglich weniger macht; denn es ist:

$$L + p = \frac{L N^2}{(N-q)^2} = L\left(1 + \frac{2q}{N}\right),$$

wenn die höhern Potenzen von $\frac{q}{N}$ unberücksichtigt gelassen werden; folglich:

$$p = \frac{2qL}{N} \text{ und } q = \frac{pN}{2L}.$$

Dieselbe Formel ist auch noch anwendbar, wenn L vermindert und folglich N vergrößert wird.

Beispiel. Ein Secundenpendel verlängert sich um $\frac{1}{100}$ Zoll und man soll die Anzahl der Secunden bestimmen, welche es täglich weniger schlägt.

Hier ist $p = 0{,}01$; folglich $q = \frac{0{,}01 \times 86400}{2 \times 39{,}13} = \frac{43200}{3913} = 11$ Sec. näherungsweise.

§. 195. Aufgabe. Wenn sich die Intensität der Schwerkraft etwas ändert, zu bestimmen, wie viel

Schwingungen das Secundenpendel täglich mehr oder weniger macht.

Es sei G der veränderte Werth von g für einen gegebenen Ort, so ändert sich t umgekehrt wie die Quadratwurzel aus g, wenn l ungeändert bleibt; folglich ist:

$$\frac{t}{1} = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{g}}; \; g = \frac{G}{t^2} = \frac{G n^2}{N^2}.$$

Wenn also ein Secundenpendel an einen andern Ort gebracht wird, wo die Intensität der Schwere größer ist, so ist $n > N$, und das Pendel macht mehr Schwingungen täglich, und umgekehrt. Da die Zunahme der Schwere im Allgemeinen gering ist, so lässt sich, wie vorhin, leicht ein Näherungswerth finden; denn es sei $g = G(1+h)$ und das Secundenpendel mache täglich q Schwingungen mehr, so ist:

$$G(1+h) = \frac{G(N+q)^2}{N^2} = \frac{G(N^2+2qN)}{N^2},$$

wenn man das Glied mit q^2 hinweg lässt, und man hat:

$$h = \frac{2q}{N}.$$

Beispiel 1. Ein Secundenpendel unter dem Aequator wird nach dem Pole gebracht, und macht hier täglich fünf Schwingungen mehr; das Verhältniss der Intensität der Schwere an beiden Oertern zu finden.

Es ist: $$h = \frac{2 \times 300}{86400} = \frac{1}{144},$$

und folglich verhält sich die Intensität der Schwere unterm Aequator zu der am Pole $= 144 : 145$.

Beispiel 2. Ein Secundenpendel wird auf die Spitze eines Berges von der Höhe m gebracht, und man soll bestimmen, wie viel Schwingungen es hier täglich weniger macht, wenn angenommen wird, dass sich die Intensität der Schwere umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung vom Mittelpunkte der Erde ändert.

Es sei r die Entfernung der ersten Station vom Mittelpunkte der Erde und G die Intensität der Schwere daselbst; folglich $r+m$ die Entfernung der zweiten Station vom Mittelpunkte der Erde, und die Intensität der Schwerkraft daselbst

$$= \frac{G r^2}{(r+m)^2} = G\left(1 - \frac{2m}{r}\right),$$

wenn die Glieder mit $\frac{m^2}{r^2}$, etc. hinweggelassen werden.

Wenn wir also $\frac{2m}{r}$ für h in die Formel substituiren, welche sowohl für die Ab- als Zunahme der Intensität der Schwere dieselbe ist, so erhalten wir:

$$\frac{2m}{r} = \frac{2q}{N} \text{ und } q = \frac{Nm}{r}.$$

Wenn der Halbmesser der Erde = **4000** engl. Meilen und die Höhe des Berges = **1** Meile gesetzt wird, so macht das Secundenpendel auf dem Berge täglich $q = \frac{16400}{4000} =$ **21,6** Schwingungen weniger als am Fuße desselben.

Sechstes Kapitel.

Rotationsbewegung um eine feste Axe.

§. **196.** In den vorhergehenden Kapiteln haben wir die Wirkung der direct auf materielle Punkte ausgeübten Kräfte betrachtet, wohin auch der Fall gehört, wenn sich ein einzelnes materielles Theilchen um eine feste Axe bewegt, womit es auf eine unveränderliche Weise verbunden ist. Denn die im vorhergehenden Kapitel (§. **193.**) betrachtete Bewegung eines materiellen Punktes in einem Kreisbogen ist dieselbe, dieser materielle Punkt mag mit dem Mittelpunkte des Kreises durch einen biegsamen Faden, oder eine starre Stange verbunden sein, vorausgesetzt, dass der Faden und die Stange weder Gewicht, noch Trägheit besitzen.

Aber wenn ein System mehrerer auf eine unveränderliche Weise mit einander verbundener materieller Theilchen sich um eine feste Axe bewegen, so modificiren die Bewegungen dieser einzelnen Theile einander, und die Bewegung des Systems wird durch das dritte auf den Fall der indirecten Wirkung ausgedehnte Bewegungsgesetz (§. **131.**) bestimmt.

Wenn z. B. q, m, n, p (Fig. **100.**) materielle Theilchen sind, welche durch die starren Arme cq, cm, cn, cp mit dem Drehungsmittelpunkte c und unter sich auf eine unveränderliche Weise verbunden sind, so kann sich keins dieser Theilchen, z. B. q bewegen, ohne dass sich die übrigen zu gleicher Zeit mit Geschwindigkeiten bewegen, welche zu der seinigen in einem gegebenen Verhältnisse stehen, und folglich lässt sich die Bewegung des Theilchens q nicht mehr durch das dritte auf die directe Wirkung beschränkte Bewegungsgesetz bestimmen, sondern es muss die gegenseitige Einwirkung der materiellen Theilchen auf einander, welche hier theils als Erzeugung und theils als Widerstand der Bewegung erscheint, in Betracht gezogen werden.

Diese Bemerkung ist im Allgemeinen auf die Bewegung starrer Körper anwendbar; denn jeder solcher Körper kann als ein Inbegriff materieller, auf eine unveränderliche Weise mit einander verbundener Theilchen betrachtet werden. Wenn sich ein solcher Körper in irgend einer drehenden Bewegung befindet, so üben die Theilchen desselben ihre Wirkung auf einander aus, wodurch die Wirkungen der übrigen sie sollicitirenden Kräfte modificirt werden. Unter solchen Umständen kann jeder starre Körper als eine Maschine betrachtet werden, und die auf einen Theil des Körpers wirkenden Kräfte pflanzen vermöge seiner Starrheit, oder seiner andern Eigenschaften ihre Wirkung auf die übrigen Theile fort, so dass jedes Theilchen mit seiner eigenen Kraft einen Druck ausübt und zugleich auch zur Bildung von Hebeln und Stangen dient, durch welche die Druckkräfte andern Theilchen des Körpers mitgetheilt werden. Die Bestimmung der Gesetze, nach welchen diese Verbindung verschiedener materieller Theilchen die Wirkung der sie bewegenden Kräfte modificirt, soll der Gegenstand unserer Betrachtungen in dem gegenwärtigen und folgenden Kapitel sein.

§. **197.** Die Grundlage, worauf sich unsere Betrachtungen in solchen Fällen stützen müssen, ist, wie bereits bemerkt worden, das auf den Fall der indirecten Wirkung erstreckte dritte Bewegungsgesetz, und nach diesem Gesetze ist die bewegende Kraft der Druckkraft in allen Fällen proportional (§. **131.**). Der Deutlichkeit und genauen Unterscheidung dieser beiden Größen wegen soll die bewegende Kraft als aus dem jeden materiellen Theilchen wirklich ertheilten Momente bestehend die wirksame bewegende Kraft dieses Theilchens und der Druck, oder jede andere äußere Kraft, welche auf das System der materiellen Theilchen wirkt, die mitgetheilte bewegende Kraft genannt werden, wo diese letztere Kraft in solchen Fällen auf das materielle Theilchen, worauf sie wirkt, nicht ihre ganze Wirkung ausübt, weil diese durch den Zusammenhang des betrachteten materiellen Theilchens mit den übrigen modificirt wird.

§. **198.** Das dritte auf den Fall der indirecten Wirkung ausgedehnte Bewegungsgesetz lässt sich folgendermaßen ausdrücken: Bei der Bewegung irgend eines Systems auf eine unveränderliche Weise mit einander verbundener materieller Punkte sind die mitgetheilten und die wirksamen bewegenden Kräfte im statischen Sinne einander gleich.

Die mitgetheilten bewegenden Kräfte, d. h. die Druckkräfte, welche auf das System wirken, bringen dieselbe Wirkung hervor, als irgend welche andere Druckkräfte, welche nach der Natur des betrachteten Systems materieller Punkte in statischer Beziehung jenen

gleich zu achten sind. So bringt z. B. eine Kraft P (Fig. 97.), welche senkrecht an dem Hebelarme CP wirkt, und den Körper um C zu drehen strebt, dieselbe Wirkung hervor, als eine Kraft 2P, welche an einem halb so langen Hebelarme CP′ wirkt. Dieses folgt nothwendig aus der Beschaffenheit des materiellen Zusammenhanges der Körper als Fortpflanzungsmittel des Druckes, und wenn wir sagen, dass ein bewegender Körper starr ist, so verstehen wir darunter, dass jede an einem Theile desselben angebrachte Kraft ihre Wirkung den übrigen Theilen nach demselben Gesetze mittheilt, als wenn sich der Körper in Ruhe befände. So wirkt z. B. jede Kraft, welche einen Körper um eine Axe zu drehen strebt, wirklich auf alle Theile desselben, indem der Körper selbst die Wirkung nach der Art und den Gesetzen des Hebels fortpflanzt.

Die wirksamen bewegenden Kräfte sind die jedem Theile des Systems von dem in der Zeiteinheit erzeugten Momente mitgetheilten bewegenden Kräfte, und sowohl die mitgetheilten, als wirksamen Kräfte werden wie bewegende gemessen, d. h. durch das Product aus der bewegten Masse und der beschleunigenden Kraft, oder durch das Product aus der Masse und der erzeugten Geschwindigkeit.

Es ist bereits früher gezeigt, dass diese mitgetheilte und wirksame Kraft in dem Falle der directen Wirkung einander gleich sind, und in §. **131.** ist nachgewiesen, dass bei dem Uebergange zu dem Falle der indirecten Wirkung weder in unsern Vorstellungen, noch in der Erfahrung ein Grund liegt, weswegen wir annehmen sollten, dass diese Gleichheit alsdann nicht mehr stattfinde; sondern dass vielmehr, wenn die Erfahrung entscheiden kann, diese Gleichheit stets in aller Strenge stattfindet.

§. **199.** Das obige Bewegungsgesetz wird oft unter der folgenden Form ausgedrückt und angewandt, unter welcher es das D'Alembertsche Prinzip genannt wird.

Lehrsatz. Wenn irgend welche Kräfte irgend ein materielles System in Bewegung setzen, so müssen die verlorenen bewegenden Kräfte der verschiedenen Theile des Systems einander das Gleichgewicht halten.

Es sei m einer der materiellen Punkte des Systems und u die Geschwindigkeit, welche die auf diesen materiellen Punkt m wirkende Kraft demselben in der Zeiteinheit ertheilen würde, wenn er von den übrigen getrennt wäre, so wäre $u\tau$ die dem materiellen Punkte m in der sehr kleinen Zeit τ mitgetheilte Geschwindigkeit. Es sei $q\tau$ die Geschwindigkeit, welche dem materiellen Punkte m bei der wirklichen Beschaffenheit des Systems mitgetheilte wird und die Geschwin-

digkeit $u\tau$ sei in zwei Geschwindigkeiten $p\tau$ und $q\tau$ zerlegt. Die beschleunigende Kraft, welche die Geschwindigkeit $u\tau$ in der Zeit τ oder u in der Zeiteinheit erzeugt, ist u, und folglich die bewegende Kraft, welche diese Geschwindigkeit hervorbringen würde, $= mu$. Ebenso sind die bewegenden Kräfte, welche in der Zeit τ die Geschwindigkeiten $p\tau$ und $q\tau$ herorbringen, resp. mp und mq, und da die Kräfte auf dieselbe Weise zerlegt werden wie Geschwindigkeiten, so lässt sich die Kraft mu in mp und mq zerlegen, wovon mq die wirksame und mp die verlorene Kraft des materiellen Punktes m ist.

Wenn ebenso m', u', p', q' für einen zweiten materiellen Punkt, m'', u'', p'', q'' für einen dritten materiellen Punkt, etc. die analogen Größen von m, u, p, q bezeichnen, so sind $m'p'$, $m''p''$, ... die von den materiellen Punkten m', m'', ... verlorenen bewegenden Kräfte.

Nach dem vorhergehenden §. sind alle dem Systeme mitgetheilten bewegenden Kräfte:

$$mu, m'u', m''u'', ...$$

den wirksamen bewegenden Kräften:

$$mq, m'q', m''q'', ...$$

nach den statischen Bedingungen des Gleichgewichtes des Systemes gleich, d. h.

$$mp, mq, m'p', m'q', m''p'', m''q'', ...$$

sind gleichbedeutend mit:

$$mq, m'q', m''q'', ...$$

und folglich sind die Kräfte:

$$mp, m'p', m''p'', ...$$

in statischem Sinne $= o$, d. h. sie halten einander an dem Systeme das Gleichgewicht.

Zusatz. In diesem Falle sind einige der verlorenen Kräfte negativ, und wenn das negative Zeichen unberücksichtigt gelassen wird, so können sie als gewonnene Kräfte betrachtet werden. Wenn also auf einen materiellen Punkt m' keine Kräfte wirken und $m'q$ die wirksame Kraft ist, so ist $m'p' = -m'q'$, und wenn die verlorene Kraft $= -m'q$, ist, so ist die gewonnene $= m'q'$.

Hiernach lässt sich der obige Satz folgendermaßen ausdrücken: In jedem Systeme halten die verlorenen und gewonnenen Kräfte der verschiedenen materiellen Punkte desselben einander das Gleichgewicht, und dieses ist die Anwendung des allgemeinen Prinzipes, dass die Wirkung und Gegen-

wirkung einander immer gleich und entgegengesetzt sind, auf den jetzt betrachteten Fall.

§. 200. Wir wollen nun die Winkelgeschwindigkeit bestimmen, welche hervorgebracht wird, wenn Kräfte auf einen um eine feste Axe beweglichen Körper wirken, indem wir blos die hervorgebrachte Bewegung als Wirkung betrachten, und die übrigen Wirkungen, wie z. B. der Druck auf die Axe und die Bewegung dieser Axe, wenn sie beweglich ist, später untersuchen.

Aufgabe. Wenn eine Kraft F ein starres, aus einer beliebigen Anzahl in derselben Ebene liegender materieller Punkte m, n, p, q, ... (Fig. 98.) bestehendes System um eine auf dieser Ebene senkrechte Axe C zu drehen strebt, die wirksame beschleunigende Kraft jedes materiellen Punktes zu finden.

Es sei F eine bewegende Kraft, welche senkrecht auf den Hebelarm Cf wirkt und M, N, P ... seien resp. die wirksamen beschleunigenden Kräfte, welche hieraus für die materiellen Punkte m, n, p, ... entspringen, so sind folglich Mm, Nn, Pp, ... die wirksamen bewegenden Kräfte der materiellen Punkte m, n, p, ... und resp. senkrecht auf Cm, Cn, Cp, ... Es wirkt also die mitgetheilte Kraft F senkrecht an den Hebelarm CF und die wirksamen bewegenden Kräfte Mm, Nn, Pp, ... wirken senkrecht auf die Hebelarme Cm, Cn, Cp, ... Folglich ist nach §. 198. und dem allgemeinen Lehrsatze für den Hebel:

$$F.Cf - M.m.Cm - N.n.Cn - P.p.Cp - \text{etc.} = 0.$$

Da sich aber die materiellen Punkte m, n, p, ... mit derselben Winkelgeschwindigkeit um C bewegen müssen, so müssen sich ihre linearen Geschwindigkeiten stets wie Cm, Cn, Cp, ... verhalten, und folglich müssen alle Veränderungen der Geschwindigkeiten, so wie die beschleunigenden Kräfte, welche diese Veränderungen in derselben Zeit hervorbringen, in demselben Verhältnisse stehen. Es verhält sich also M: $N = Cm : Cn$, und folglich ist $N = \frac{M.Cn}{Cm}$, und ebenso $P = \frac{M.Cp}{Cm}$ etc. Werden diese Werthe in die obige Gleichung substituirt, so erhält man:

$$F.Cf - M.m.Cm - M.n.\frac{Cn^2}{Cm} - M.p.\frac{Cp^2}{Cm} - \text{etc.} = 0;$$

folglich: $$M = \frac{F.Cf.Cm}{m.Cm^2 + n.Cn^2 + pCp^2 + \text{etc.}},$$

und ebenso: $$N=\frac{F.Cf.Cn}{m.Cm^2+n.Cn^2+pCp^2+\text{etc.}},$$

$$P=\frac{F.Cf.Cp}{m.Cm^2+n.Cn^2+pCp^2+\text{etc.}},$$

u. s. f.*)

Es ist also die wirksame Kraft in f $=\frac{F.Cf^2}{m.Cm^2+nCn^2+p.Cp^2+\text{etc.}}$,

und für die die Entfernung $=1$ von der Axe:

$$=\frac{F}{m.Cm^2+n.Cn^2+p.Cp^2+\text{etc.}}.$$

Wenn statt der Kraft in F beliebige Kräfte auf irgend eine Weise auf das System wirkten, so müsste für F.Cf das Moment dieser Kräfte in Beziehung auf die Axe C, d. h. das Product aus jeder und dem Perpendikel, welches von C auf ihre Richtung gefällt ist, substituirt werden, wo die Momente negativ zu setzen wären, welche das System nach entgegengesetzter Richtung zu drehen strebten.

Zusatz 1. Da die wirksame beschleunigende Kraft in f

$$=\frac{F}{m.\frac{Cm^2}{Cf^2}+n\frac{Cn^2}{Cf^2}+p.\frac{Cp^2}{Cf^2}}$$

ist, so erhellet, dass der Widerstand, welchen m der Mittheilung der Bewegung entgegenstellt, derselbe ist, als der einer Masse $m.\frac{Cm^2}{Cf^2}$, welche sich in f befindet, und worauf die Kraft unmittelbar wirkt, und Gleiches gilt für die übrigen materiellen Punkte des Systemes.

---

*) Da dieser Satz die Grundlage der ganzen Lehre von der drehenden Bewegung ist, so wollen wir denselben noch aus elementaren Gesetzen und unabhängig von dem allgemeinen D'Alembertschen Prinzipe ableiten. Es sei F in statistischem Sinne einer Anzahl beschleunigender Kräfte, wie M in m, N in n, ..., welche senkrecht sind auf Cm, Cn, ... und sich verhalten wie Cm, Cn, ..., gleich; so ist:

$F.Cf-M.m.Cm-N.n.Cn, \text{etc.}=o$ und $N=M.\frac{Cn}{Cm}$, etc.

also:

$F.Cf-M.m.Cm-M.n.\frac{Cn_2}{Cm}, \text{etc.}=o, u.M=\frac{F.Cf.Cm}{m.Cm^2+n.Cn^2+\text{etc.}}$

Nun bringen aber M, N, ... nach §. 198. dieselbe Wirkung hervor, als F, und wenn Cm, Cn, ... als nicht zusammenhängend und unabhängig von einander um C beweglich angenommen werden, und das dritte Bewegungsgesetz hier anwendbar ist; so folgt, dass, wenn M, N, ... auf m, n, ... wirken, die Beschleunigungen von m, n, ... den Größen Cm, Cn,

Zusatz 2. Aus dem Vorhergehenden erhellet, dass sich die auf die verschiedenen materiellen Punkte des Systemes ausgeübten wirksamen Kräfte, wie ihre Entfernungen von der Axe C verhalten.

Zusatz 3. Wenn die Kraft F und der Halbmesser Cf constant sind, so ist die wirksame Kraft an jedem materiellen Punkte des Systemes constant, die Bewegungen sind gleichförmig beschleunigt, und man kann die Formel für solche Bewegungen anwenden. Aber wenn F veränderlich ist, so muss man die Formel für die veränderliche Bewegung anwenden.

Zusatz 4. Wenn die wirkende Kraft das Gewicht irgend eines Körpers ist, so muss derselbe mit unter die Körper m, n, p, ... in den Nenner aufgenommen werden. Z. B. wenn ein System in einer horizontalen Ebene liegender materieller Punkte m, n, p, ... (Fig. 99.) um eine verticale Axe AC durch ein Gewicht W bewegt wird, welches vermittelst einer über einer Rolle B gehenden Schnur senkrecht auf den Halbmesser Cf wirkt, so bewegt sich das Gewicht W mit derselben Geschwindigkeit, als ein Körper an dem Ende des Armes Cf, und es wird folglich dieselbe bewegende Kraft angewandt, um W zu bewegen, als wenn es sich in f befände. Wir haben also:

$$\text{wirksame Kraft in } f = \frac{\text{Gewicht von } W \,.\, Cf^2}{W \,.\, Cf^2 + m \,.\, Cm^2 + n \,.\, Cn^2 + \text{etc.}},$$

und die wirksame bewegende Kraft auf W ist dieselbe, als die in f.

Zusatz 5. Die Größen W, m, n, ... im Nenner des letzten Ausdruckes sind die Massen der Körper und das Gewicht W ist eine bewegende Kraft, so dass, wenn g die beschleunigende Kraft der Schwere bezeichnet, das Gewicht von $W = Wg$ ist.

Zusatz 6. Wenn die materiellen Punkte m, n, p, ... nicht in derselben auf der Axe senkrechten Ebene liegen, so seien Cm, C′n, C″p, ... ihre senkrechten Entfernungen von der Axe und alsdann behält die vorhergehende Formel ihre Richtigkeit, wenn man diese Entfernungen für Cm, Cn, Cp, ... setzt. Oder wenn man eine auf der Axe senkrechte Ebene Cmn annimmt und die materiellen Punkte des Systemes durch Parallelen zu der Drehungsaxe auf diese Ebene pro-

---

.... proportional sind, dass mithin die Winkelgeschwindigkeiten von Cm, Cn, ... gleichmäßig zunehmen und die materiellen Punkte m, n, ... des Systemes stets dieselbe Lage gegen einander behalten. Wenn wir also Cm, Cn, ... als fest mit einander verbunden und das System als starr annehmen, so ist die Wirkung stets dieselbe, als wenn m, n, ... nicht mit einander verbunden wären. Wenn also F auf das starre System wirkt, so ist die in m wirksame Kraft ebenfalls der ebengefundene Werth von M, welcher mit dem Werthe im Texte übereinstimmt.

jecirt, so behält dieselbe Formel ihre Richtigkeit, wenn m, n, p,.... die Projectionen dieser Punkte sind.

Zusatz 7. Wenn in Fig. 98. der Körper p nicht an dem Halbmesser Cp, sondern an dem Ende eines in p auf Cp senkrechten biegsamen Fadens befestigt ist, der durch die wirkenden Kräfte immer gespannt gehalten wird; so ist die Wirkung für einen Augenblick dieselbe, als wenn p an dem Ende von Cp befestigt wäre. Denn die bewegende Kraft, welchen der Faden auf den Körper ausübt, ist der Reaction gleich, welche er auf das Ende des Halbmessers Cp ausübt, und ist für einen Augenblick senkrecht auf Cp. Die wirksame bewegende Kraft auf den Körper ist daher identisch mit der Kraft, welche auf das Ende von Cp wirken muss, um der Reaction des Fadens das Gleichgewicht zu halten, und folglich findet zwischen der mitgetheilten und der wirksamen bewegenden Kraft stets das Gleichgewicht statt, wenn die auf den an dem Faden befestigten Körper ausgeübte wirksame Kraft mitgezählt wird.

Zusatz 8. Wenn, wie in Fig. 102., ein Körper P mit dem Systeme durch einen Faden verbunden ist, welcher auf einen Cylinder gewickelt ist, dessen Drehungsaxe mit der Axe C zusammenfällt, so sind die Formeln in dem gegenwärtigen §. auf dieselbe Weise anwendbar, als wenn der Körper P mit dem Cylinder an dem Punkte fest verbunden wäre, wo sich der Faden abwickelt; denn der Faden ist in jedem Augenblicke senkrecht auf dem nach dem Berührungspunkte gezogenen Halbmesser des Cylinders.

§. 201. Der Nenner des Bruches in dem vorhergehenden Ausdrucke für die wirksamen Kräfte ist eine Größe, welche einen besondern Namen erhalten hat, nämlich das Trägheitsmoment heißt.

Erklärung. Die Summe, welche man erhält, wenn man jedes materielle Theilchen des Systemes mit dem Quadrate seiner Entfernung von der Drehungsaxe multiplicirt und alle diese einzelnen Producte zusammenaddirt, wird das Trägheitsmoment in Beziehung auf diese Axe genannt.*)

Diese Größe kommt bei allen Untersuchungen über drehende Bewegung vor, und wenn das System, statt aus einzelnen materiellen

*) Die Trägheit eines Körpers ist das Maß seines Widerstandes, welchen er der Mittheilung der Bewegung entgegensetzt (§. 127.). Bei einem einzelnen materiellen Punkte verhält sie sich blos wie die Masse desselben; aber bei einem um eine Axe beweglichen Körper hängt der Widerstand, welchen ein Theilchen der Bewegung entgegenstellt, auch von der Entfernung desselben von der Drehungsaxe ab, wie die Wirkung einer an einem Hebel wirkenden Kraft. Die Wir-

Punkten zu bestehen, ein continuirlicher Körper von endlicher Größe ist, so ist das Trägheitsmoment die Summe der Producte aus jedem materiellen Theilchen und dem Quadrate seiner Entfernung von der Drehungsaxe. Diese Summe besteht alsdann aus unendlich vielen Gliedern, und kann, wie wir an einem andern Orte zeigen werden, durch Integralrechnung gefunden werden.

Wenn $m, m_1, m_2, m_3, \ldots$ die materiellen Theilchen und $Cm, Cm_1, Cm_2, \ldots$ resp. ihre Entfernungen von der Drehungsaxe sind, so kann das Trägheitsmoment ausgedrückt werden durch $\Sigma (m.Cm^2)$, und wenn F eine bewegende Kraft ist, welche senkrecht an dem Hebelarme Cf wirkt, so ist nach §. **200.** die beschleunigende Kraft des Punktes, worauf die bewegende Kraft wirkt,

$$= \frac{F.Cf^2}{\Sigma (m.Cm^2)}.$$

Man kann immer eine Größe k von solcher Beschaffenheit finden, dass:

$$k^2 \Sigma m = \Sigma (m.Cm^2)$$

ist, wo Σm die Summe aller materiellen Theilchen des Systemes bezeichnet.

Wenn auf jeden Punkt des Systemes Kräfte wirken, so wird die hervorgebrachte Wirkung, wie wir in der nächsten Aufgabe sehen werden, nach demselben Prinzipe wie vorhin berechnet.

§. **102.** Aufgabe. *Ein unveränderliches System materieller Punkte ist um eine horizontale Axe beweglich, und es wirkt die Schwerkraft auf alle Theile desselben; man soll die beschleunigende Kraft bestimmen.*

Es sei C (Fig. **100.**) ein Punkt der Drehungsaxe und $m, n, p, \ldots$ die materiellen Punkte des Systemes. Man ziehe durch C eine Horizontallinie CC', welche die durch $m, n, p, \ldots$ gehenden Verticallinien in $d, e, h, \ldots$ schneidet, so sind die Gewichte von $m, n, p, \ldots$ die mitgetheilten bewegenden Kräfte, und wenn M die wirksame beschleunigende Kraft von m bezeichnet, so sind nach dem Vorhergehenden die wirksamen beschleunigenden Kräfte von $n, p, \ldots$ resp.

$$\frac{M.Cn}{Cm}, \frac{M.Cp}{Cm}, \ldots$$

---

kung einer Kraft an einem Hebel verhält sich wie das Product aus dieser Kraft und der Entfernung ihres Angriffspunktes vom Drehungspunkte, und wird das *Moment* genannt, während die Wirkung der Trägheit als Widerstand der Rotationsbewegung sich nach dem Obigen wie das Product aus der Masse und dem Quadrate ihrer Entfernung von der Drehungsaxe verhält, welches *Trägheitsmoment* des betrachteten materiellen Theilchens, und die Summe dieser Producte für alle Theile des Systemes das Trägheitsmoment des letztern genannt wird.

und die wirksamen bewegenden Kräfte resp.:

$$M.m, \frac{M.n.Cn}{Cm}, \frac{M.p.Cp}{Cm}, \ldots.$$

Nun sind aber $Cd, Ce, Ch, \ldots.$ senkrecht auf den Richtungen der ersten Kräfte und $Cm, Cn, Cp, \ldots.$ senkrecht auf den Richtungen der letzten Kräfte, und wenn $m, n, p, \ldots.$ die Massen der materiellen Punkte des Systemes bezeichnen, so sind ihre Gewichte oder bewegenden Kräfte resp. $m.g, n.g, p.g, \ldots$ Folglich haben wir nach dem Prinzipe des Gleichgewichtes zwischen den mitgetheilten und den wirksamen Kräften (§. 198.) und vermöge der Eigenschaft des Hebels (§. 22):

$$m.g.Cd+n.g.Ce+p.g.Ch.+\ldots$$
$$=M.m.Cm+\frac{M.n.Cn^2}{Cm}+\frac{M.p.Cp^2}{Cm}+\ldots$$

folglich: $$M=\frac{(m.Cd+n.Ce+p.Ch+\ldots)Cm.g}{m.Cm^2+n.Cn^2+pCp^2+\ldots}.$$

Zusatz 1. In dem Zähler des vorhergehenden Ausdruckes kommen negative Glieder vor, wenn auf der andern Seite der durch C gezogenen Verticallinie materielle Punkte liegen, deren Gewicht das System nach entgegengesetztem Sinne zu drehen strebt, während die Glieder im Nenner stets positiv bleiben, weil sich alle materiellen Punkte nach derselben Richtung um C bewegen, und daher die wirksamen beschleunigenden Kräfte stets nach derselben Richtung wirken.

Zusatz 2. Die wirksame beschleunigende Kraft an irgend einem andern materiellen Punkte des Systemes, z. B. an n, ist:

$$N=\frac{(m.Cd+n.Ce+p.Ch+\ldots)Cn.g}{m.Cm^2+n.Cn^2+p.Cp^2+\ldots}.$$

Zusatz 3. Wenn G der Schwerpunkt des Systemes ist, und das von G gefällte Perpendikel Ch in H schneidet, so ist nach §. 62:

$$(m.Cd+n.Ce+p.Ch+\ldots)=(m+n+p+\ldots)CH,$$

und wenn φ den Winkel bezeichnet, welchen CG mit der Verticale bildet, so ist:

$$CH=CG\sin\varphi,$$

folglich: $$M=\frac{(m+n+p+\ldots)CG\sin\varphi Cm.g}{m.Cm^2+n.Cn^2+pCp^2+\ldots},$$

oder wenn man $m+n+p+\ldots$ durch Σm und den Nenner durch $\Sigma(m.Cm^2)$ bezeichnet; so ist:

$$M=\frac{Cm.CG.g.\sin\varphi.\Sigma m}{\Sigma(m.Cm^2)}.$$

§. **203.** Aufgabe. Einen Punkt eines um eine feste horizontale Axe beweglichen starren Systemes zu finden, welcher durch die Schwere ebenso beschleunigt wird, als ein einzelner materieller Punkt, der um dieselbe Axe beweglich ist, in derselben Lage durch die Schwere beschleunigt würde.

Wenn O (Fig. **100.**) irgend ein Punkt in CG ist, so ist nach §. **202.** die beschleunigende Kraft von $O = \frac{CO \,.\, CG \,.\, g \sin\varphi \,\Sigma m}{\Sigma(m \,.\, C m^2)}$. Wenn sich nun in O blos ein einzelnes materielles Theilchen befände, und alle übrigen entfernt wären, so wäre die beschleunigende Kraft des Theilchens in $O = g \sin\varphi$, weil man annehmen kann, dass sich dieses materielle Theilchen auf einem Kreisbogen bewegt, dessen Halbmesser CO ist, und dieser Kreisbogen bildet in O mit der Horizontallinie denselben Winkel φ, welchen CO mit der Verticale bildet. Folglich ist nach §. **170.** die beschleunigende Kraft $= \frac{g\,h}{l} = g \sin\varphi$, und da der Punkt O so bestimmt werden soll, dass die beschleunigenden Kräfte einander gleich sind; so muss:

$$CO \,.\, CG \,.\, \Sigma m = \Sigma(m \,.\, C m^2);$$

folglich:
$$CO = \frac{\Sigma(m \,.\, C m^2)}{CG \,.\, \Sigma m} \qquad (\alpha)$$

sein. Der Punkt O wird der Schwingungsmittelpunkt genannt, und ein einzelner materieller Punkt in O wird in jeder beliebigen Lage von CG ebenso beschleunigt, als wenn er einen Punkt des Systemes bildet, und folglich sind die Schwingungen von CO und die des ganzen Systemes genau dieselben, als wenn sich in O nur ein materielles Theilchen befände.

Zusatz **1.** Die Schwingungszeit des ganzen Systemes ist dieselbe als die eines einfachen Pendels von der Länge CO, und wenn folglich $CO = l$ gesetzt wird, so ist die Schwingungszeit für kleine Schwingungen $= \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ (§. **193.**).

Zusatz **2.** Wenn man das Trägheitsmoment und den Schwerpunkt des materiellen Systemes kennt, so wird der Schwingungsmittelpunkt in Beziehung auf die Axe C durch die Formel:

$$CO = \frac{\Sigma(m \,.\, C m^2)}{CG \,.\, \Sigma m}$$

bestimmt, welche anwendbar ist, das System mag aus einzelnen materiellen Punkten, oder aus Körpern von endlicher Größe bestehen.

§. 204. Lehrsatz. Das Trägheitsmoment irgend eines materiellen Systemes in Beziehung auf eine gegebene Axe ist gleich der Summe aus seinem Trägheitsmomente in Beziehung auf eine zu dieser Axe parallele und durch den Schwerpunkt gehende Axe, und aus dem Producte der Masse des Systemes mit der Entfernung seines Schwerpunktes von der gegebenen Axe.

Es seien m, n, p, q, ... (Fig. 101.) die materiellen Theilchen eines um eine Axe C beweglichen Systemes, welche wir auf eine auf dieser Axe senkrechte Ebene projiciren wollen; G sei der Schwerpunkt von m, n, p, q und m d sei senkrecht auf C G, so ist:

$$Cm^2 = CG^2 + Gm^2 + 2CG.Gd,$$

und ebenso ist, wenn n o, p h, q k, senkrecht auf C G sind:

$$Cn^2 = CG^2 + Gn^2 - 2CG.Ge,$$

$$\text{etc.} = \text{etc.}$$

also:

$$m.Cm^2 + n.Cn^2 + p.Cp^2 + \text{etc.}$$
$$= m.CG^2 + n.CG^2 + p.CG^2 + \text{etc.}$$
$$+ m.Gm^2 + n.Gn^2 + p.Gp^2 + \text{etc.}$$
$$+ 2CG(m.Gd - n.Ge + p.Gh - \text{etc.}),$$

und da wegen der Eigenschaft des Schwerpunktes:

$$m.Gd - n.Ge + p.Gh - \text{etc.} = o$$

ist; so haben wir:

$$m.Cm^2 + n.Cn^2 + p.Cp^2 + \text{etc.} = (m + n + p + \text{etc.})CG^2$$
$$+ m.Gm^2 + n.Gn^2 + p.Gp^2 + \text{etc.},$$

worin der ausgesprochene Lehrsatz enthalten ist.

Zusatz 1. Dieser Lehrsatz lässt sich für eine beliebige Anzahl von Körpern folgendermaßen ausdrücken:

$$\Sigma(m.Cm^2) = CG^2.\Sigma m + \Sigma(m.Gm^2),$$

oder wenn $.Cm = r$, $CG = a$, $\Sigma m = M$, $\Sigma(m.Gm^2) = Mk^2$ ist, so hat man:

$$\Sigma m r^2 = M(a^2 + k^2).$$

Zusatz 2. Kennt man also das Trägheitsmoment in Beziehung auf eine durch den Schwerpunkt G gehende Axe, so lässt sich vermittelst dieses Ausdruckes leicht das Trägheitsmoment in Beziehung auf eine durch einen beliebigen Punkt C gehende zu der ersten parallele Axe finden.

Zusatz 3. Das Trägheitsmoment in Beziehung auf eine durch den Schwerpunkt G gehende Axe ist kleiner als das Trägheitsmoment in Beziehung auf irgend eine andere parallele Axe.

§. 205. Lehrsatz. Der Mittelpunkt der Aufhängung und der der Schwingung sind reciprok, d. h. wenn der Schwingungsmittelpunkt zum Aufhängungspunkte gemacht wird, so wird der erste Aufhängungsmittelpunkt der neue Schwingungsmittelpunkt.

Denn in Fig. 100. ist: $CO = \frac{\Sigma(m.Cm^2)}{CG.\Sigma m}$ (§. 203.), und nach §. 204. ist:

$$\Sigma(m.Cm^2) = \Sigma(m.Gm^2) + CG^2.\Sigma m,$$

oder wenn man M für die Masse Σm und $k^2 M$ für $\Sigma(m.Gm^2)$ setzt, so ist:

$$CO = \frac{k^2}{CG} + CG; \text{ folglich } GO = \frac{k^2}{CG} \text{ und } CG = \frac{k^2}{GO}.$$

Wenn man also den Körper an dem Schwingungsmittelpunkte O aufhängt, so ist nach derselben Formel C der neue Schwingungsmittelpunkt.

Zusatz 1. CO ist blos von GC abhängig und bleibt ungeändert, so lange CG ungeändert bleibt. Wenn man also aus G (Fig. 96.) mit dem Halbmesser GC einen Kreis CC′ in der Schwingungsebene, d. h. in einer auf der Aufhängungsaxe senkrechten Ebene beschreibt, so bleibt CO ungeändert, an welchem Punkte dieses Kreisumfanges man den Körper auch aufhängen mag, und folglich bleibt die Schwingungszeit auch dieselbe, an welchem dieser Punkte der Körper auch aufgehangen werden mag.

Zusatz 2. Wenn man ferner mit dem Halbmesser GO einen Kreis OO′ beschreibt, so bleibt die Schwingungszeit immer dieselbe, der Körper mag an einem Punkte des Kreisumfanges OO′, oder an irgend einem Punkte des Kreisumfanges CC′ aufgehangen sein.

Siebentes Kapitel.

Bewegung von Maschinen.

§. 206. In dem gegenwärtigen Kapitel wollen wir die vorhergehenden Prinzipien zur Bestimmung der beschleunigenden Kräfte der mechanischen Potenzen und anderer einfacher Verbindungen auf einander wirkender Körper anwenden. Sind die beschleunigenden Kräfte bekannt, so ergeben sich daraus, wie wir in der analytischen Dynamik sehen werden, die Bewegungen durch Integralrechnung.

Erster Abschnitt.

Bewegung um eine feste Axe.

Aufgabe. Die beschleunigende Kraft zweier Gewichte an einem Rade an der Welle (Fig. **102.**) zu bestimmen.

Es werde das Gewicht Q vermittelst einer Schnur die um zwei Cylinder A, B gewickelt ist, welche eine gemeinschaftliche horizontale Axe haben, durch das Gewicht P aufwärts gezogen, a, b seien die Halbmesser der Cylinder und $k^2 \Sigma m$ oder $k^2 M$, wo M die ganze Masse der Maschine bezeichnet, sei wie in §. **206.** das Trägheitsmoment der Maschine AB in Beziehung auf ihre Axe; so wirkt die mitgetheilte Kraft Pg an dem Hebelarm a, und $-Qg$ an dem Hebelarm b, und folglich ist ihr Moment $= Pga - Qgb$. Mithin ist nach §. **200.** Zus. **8.** und §. **201.** Zus. **2.** die niederwärts gerichtete beschleunigende Kraft an $P = \frac{(Pa - Qb)ga}{Pa^2 + Qb^2 + Mk^2}$ und die aufwärts gerichtete beschleunigende Kraft an $Q = \frac{(Pa - Qb)gb}{Pa^2 + Qb^2 + Mk^2}$, und da diese Kräfte constant sind, so kann die Bewegung vermittelst der Formeln für die Bewegung constanter beschleunigender Kräfte gefunden werden.

Zusatz **1.** Wenn $Qb > Pa$ ist, so wirkt die beschleunigende Kraft nach entgegengesetzter Richtung und das Gewicht Q sinkt herab, wenn es sich anfänglich in Ruhe befand.

Zusatz **2.** Wenn Tg die Spannung der Schnur bezeichnet, woran P hängt, so wird P durch sein Gewicht niederwärts und durch die Spannung der Schnur aufwärts gezogen; folglich ist die auf P wirkende bewegende Kraft $= Pg - Tg$ und die beschleunigende Kraft $= \frac{(P-T)g}{P}$; also:

$$\frac{(P-T)}{P} g = \frac{(Pa - Qb)ga}{Pa^2 + Qb^2 + Mk^2};$$

folglich:

$$T = \frac{P(Qb^2 + Qab + Mk^2)}{Pa^2 + Qb^2 + Mk^2}.$$

Ebenso, wenn T' die Spannung der Schnur bezeichnet, woran Q hängt, so ist:

$$T' = \frac{Q(Pa^2 + Pab + Mk^2)}{Pa^2 + Qb^2 + Mk^2}.$$

Zusatz **3.** Der von den Gewichten P, Q herrührende Druck auf den Mittelpunkt der Drehung ist gleich der Summe dieser Spannungen, und wird durch eine dieser Summe gleiche Gegenwirkung auf-

gehoben; denn die an der Maschine wirkenden Kräfte müssen nach den Prinzipien der Statik im Gleichgewichte sein. Folglich ist der Druck auf den Mittelpunkt der Drehung:

$$T+T'=\frac{PQ(a+b)^2+(P+Q)Mk^2}{Pa^2+Qb^2+Mk^2}.$$

§. **207.** Aufgabe. Die beschleunigende Kraft zweier Gewichte P und Q (Fig. **103.**) zu bestimmen, welche an einer Verbindung von Rädern an der Welle wirken.

Die Räder an der Welle können entweder durch Zähne auf einander wirken, wie in D, oder durch Schnüre, welche zugleich um das Rad und die Welle gehen und vermittelst der Reibung eine Drehung hervorbringen, wie in D', oder auf andere Weise; allein die mechanischen Bedingungen der Aufgabe bleiben in allen Fällen dieselben.

Es seien a, b resp. die Halbmesser des ersten Rades und seiner Welle, a', b' die Halbmesser des zweiten Rades und seiner Welle, a'', b'' die des dritten Rades nnd seiner Welle, so sind die mitgetheilten bewegenden Kräfte Pg und Qg, welche resp. in A und B nach entgegengesetzter Richtung wirken, und nach statischen Prinzipien wird der letztern durch eine in P wirkende Kraft das Gleichgewicht gehalten, welche $=Qg.\frac{b.b'.b''}{a,a'.a''}$ ist. Folglich ist die mitgetheilte bewegende Kraft

$=$ der Kraft $Pg-Qg.\frac{b.b'.b''}{a.a'.a''}$, welche in A, also in der Entfernung a von C wirkt.

Es seien $Mk^2, M'k'^2, M''k''^2, \ldots$ resp. die Trägheitsmomente der Räder M, M', M'', ... nebst ihren Wellen in Beziehung auf ihre Mittelpunkte und x sei die wirksame beschleunigende Kraft in P oder A, so ist, da sich die beschleunigenden Kräfte wie die Geschwindigkeiten verhalten, die beschleunigende Kraft in D oder $E=\frac{bx}{a}$, die in D' oder $E'=\frac{b.b'x}{a.a'}$, und die in B oder $Q=\frac{b.b'.b''x}{a.a'.a''}$.

Da nun die wirksame beschleunigende Kraft an $P=x$ ist, so ist die in irgend einer Entfernung r von C an dem Rade $M=\frac{rx}{a}$, und wenn m ein materielles Theilchen in dieser Entfernung von C ist, so ist die wirksame bewegende Kraft $=\frac{mrx}{a}$ und diese ist hinsichtlich ihres Momentes in Beziehung auf C einer in A wirkenden Kraft $\frac{mr^2x}{a^2}$

gleich. Folglich ist die ganze wirksame bewegende Kraft in M einer in A wirkenden Kraft $\frac{x\Sigma . mr^2}{a^2} = \frac{xMk^2}{a^2}$ gleich.

Ebenso ergibt sich, dass die wirksame bewegende Kraft in M′ der in E wirkenden Kraft $\frac{bx}{a} . \frac{M'k'^2}{a'^2}$ gleich ist, welche nach der Beschaffenheit der Maschine hinsichtlich ihrer Wirkung, das System um C zu drehen, einer in A wirkenden Kraft $\frac{b^2 x}{a^2} . \frac{M'k'^2}{a'^2}$ gleich ist.

Die auf Q wirkende beschleunigende Kraft ist gleich $\frac{b . b' . b'' x}{a . a' . a''}$; also die bewegende Kraft $\frac{b . b' . b'' x}{a . a' . a''} Q$, welche der in A wirkenden Kraft $\frac{b^2 . b'^2 . b''^2 x}{a^2 . a'^2 . a''^2}$ gleich ist. Folglich ist das Moment der mitgetheilten Kräfte in Beziehung auf C:

$$= g a \left(P - Q \frac{b . b' . b''}{a . a' . a''} \right),$$

und das Moment der ganzen wirksamen Kraft in Beziehung auf C:

$$= Pax + Qax . \frac{b^2 . b'^2 . b''^2}{a^2 . a'^2 . a''^2}$$

$$+ Max . \frac{k^2}{a^2} + M'ax . \frac{b^2}{a^2} . \frac{k'^2}{a'^2} + M''ax . \frac{b^2 b'^2}{a^2 a'^2} . \frac{k''^2}{a''^2}.$$

Werden diese Kräfte einander gleich gesetzt und die Größen $\frac{b}{a'}, \frac{b'}{a''}, \frac{b''}{a''}$ der Kürze wegen mit n, n′, n″ bezeichnet, so erhält man für die beschleunigende Kraft x von P:

$$x = \frac{(P - Qn . n'n'')g}{P + Qn^2 n'^2 n''^2 + M\frac{k^2}{a^2} + M'n\frac{k'^2}{a'^2} + M''nn'\frac{k''^2}{a''^2}}.$$

Die beschleunigende Kraft von Q ist = n n′ n″ x und beide beschleunigenden Kräfte sind constant.

§. 208. Atwood hat zur Messung der von unter der Wirkung der Schwere herabfallenden Körpern durchlaufenen Räume und erlangten Geschwindigkeiten die in Fig. 104. dargestellte Maschine erfunden, um die Beobachtungsresultate mit denen der Theorie zu vergleichen. Zwei gleiche Gewichte P, Q hängen an einer über eine feste Rolle M gehenden feinen Schnur, wovon auf das eine noch ein kleines Gewicht D gelegt wird, damit es sich niederwärts bewegt und die Bewegungs-

zeiten und Räume beobachtet werden können. Die Gewichte P und Q sind in gleiche cylindrische Büchsen eingeschlossen, so dass der Widerstand der Luft auf beide derselbe ist, und auf die Bewegung keinen Einfluss hat, und die Wirkung der Reibung ist fast ganz dadurch beseitigt, dass die sehr dünnen Zapfen der Axe von M an jedem Ende C auf Frictionsrädern M, M′ ruhen *)

Die Zeiten werden vermittelst eines Pendels und die durchlaufenen Räume mit Hülfe eines in Zolle eingetheilten Maßstabes B F, längs dessen sich P herabbewegt, gemessen. Um die Geschwindigkeit bestimmen zu können, ist die Einrichtung getroffen, dass P durch eine Oeffnung M N gehen muss, welche sich in einem an dem Maßstabe B F befestigten vorspringenden Ansatze befindet, worauf das Gewicht D liegen bleibt, wenn P durch diese Oeffnung geht. Da nun das Gewicht von D die alleinige beschleunigende Kraft in der Maschine ist, so muss sich P, nachdem es durch die Oeffnung gegangen ist, mit der daselbst erlangten Geschwindigkeit gleichförmig fortbewegen, und nachdem sich P durch einen gegebenen Raum E F bewegt hat, wird es durch den an dem Maßstabe F befindlichen Vorsprung aufgehalten.

Man lässt nun das Gewicht P von einem gegebenen Punkte B von der Ruhe aus herabfallen, bis man den Schlag von D auf M N hört, und bemerkt die Zeit, worauf man, wenn man den Schlag von P auf F hört, die Zeit wieder bemerkt, so gibt der Quotient aus dem Raume E F und diesem Zeitintervalle die Geschwindigkeit, so dass man den Raum B F und die zum Beschreiben desselben erforderliche Zeit mit den durch die Theorie gefundenen Resultaten vergleichen kann.

---

*) Um zu zeigen, dass die Wirkung der Reibung durch diese Räder vermindert wird, kann man sich vorstellen, dass die Reibung eine Kraft ist, welche nach der Tangente an der Rolle wirkt.

Wenn die Axe C auf unbeweglichen Flächen ruht, und die Größe der Reibung durch F ausgedrückt wird, so ist ihre Wirkung an $A = \frac{Fb}{a}$. Wenn die Welle C auf Frictionsrädern ruht, so drehen sich die Umfänge der letztern mit dem Umfange der Welle und es findet zwischen diesen drei Flächen keine Reibung statt, sondern die Reibung findet an den Wellen C, C′ statt, und wenn wir die an der Oberfläche C′ stattfindende Reibung mit F bezeichnen, so ist diese Kraft an dem Umfange der Welle $C = F \cdot \frac{b'}{a'}$ und an $A = F \cdot \frac{b \cdot b'}{a \cdot a'}$. Da man nun bei dieser Einrichtung 4 Wellenenden C′ für eins C hat, so ist die Reibung an $A = 4F \cdot \frac{b \cdot b'}{a \cdot a'}$, und sie wird folglich bei dieser Einrichtung der Maschine in dem Verhältnisse von $a' : 4b'$ vermindert, vorausgesetzt, dass F an beiden Frictionsrädern denselben Werth hat.

Die Geschwindigkeiten von P und Q sind sehr klein, weil D klein ist und die Räder F, M′, M″ bewegt werden müssen, so dass ihr Trägheitsmoment in dem Nenner des Ausdruckes für die beschleunigende Kraft vorkommen muss. Bemerkt man, dass sich außer den beiden Frictionsrädern M′ und M″ an dem andern Ende der Welle A noch zwei andere solcher Räder befinden, und bezeichnet das Trägheitsmoment eines jeden derselben mit $M'k'^2$, das von M mit Mk^2 und die Halbmesser der Räder und Wellen resp. mit a, b, a′, b′, so ist die beschleunigende Kraft von P

$$= \frac{Dg}{2P + D + M.\frac{k^2}{a^2} + 4M'.\frac{b.k'^2}{a.a'^2}}$$

Die Wirkung der Trägheit der Räder ist dieselbe, als wenn eine Masse $M\frac{k^2}{a^2} + 4M'.\frac{b}{a}.\frac{k'^2}{a'^2}$ im Umfange von N vereinigt wäre. Nachricht über die mit dieser Maschine angestellten Versuche findet man in Atwood's Treatise on Rectilinear and Rotatory Motion, Sect. 7., und die erhaltenen Beobachtungsresultate stimmen genau mit den aus den Formeln für die gleichförmig beschleunigte Bewegung abgeleiteten überein.

§. 209. Aufgabe. Die beschleunigenden Kräfte zweier Gewichte an einem Hebel zu finden.

Es seien P, Q (Fig. 105.) die beiden an den Enden eines Hebels, dessen Arme a, b sind, befestigten Gewichte, M die Masse des Hebels, und h die Entfernung ihres Schwerpunktes vom Mittelpunkte der Drehung. PQ sei irgend eine Lage des Hebels, in welcher er mit der Verticale einen Winkel φ bildet; so sind $a\cos\varphi$, $b\cos\varphi$ und $h\cos\varphi$ resp. die vom Drehungsmittelpunkte auf die verticalen Richtungen der Kräfte P, Q und M gefällten Perpendikel, und das Moment der Kräfte vermöge welcher P herabzusinken strebt, ist $= (Pa + Mh - Qb)\, g\cos\varphi$, und wenn Mk^2 das Trägheitsmoment des Hebels selbst bezeichnet, so ist die senkrecht auf CP wirkende beschleunigende Kraft in P:

$$= \frac{(Pa + Mh - Qb)\, g\, a\cos\varphi}{Pa^2 + Qb^2 + Mk^2}.$$

§. 210. Aufgabe. Ein um eine Axe C (Fig. 106.) beweglicher Körper wird in einem gegebenen Punkte von einer gegebenen Masse mit einer gegebenen Geschwindigkeit gestoßen, und man soll die Bewegung desselben bestimmen.

Der Stoß ist eigentlich nichts anders, als ein eine kurze Zeit fortdauernder Druck. Wenn nun irgend eine Kraft in einer Entfernung a von der Axe auf einen Körper wirkt, dessen Trägheitsmoment $= Mk^2$ ist, so ist die in irgend einem Augenblicke hervorgebrachte Wirkung dieselbe, als wenn eine Masse $\frac{Mk^2}{a^2}$ in einem Punkte vereinigt wäre, dessen Entfernung von der Drehungsaxe $= a$ ist. Die ganze hervorgebrachte Wirkung ist also dieselbe, als wenn eine solche Masse für den Körper substituirt würde, welche Zeit zu dieser Wirkung auch angewandt wird, und folglich ist die Wirkung eines senkrechten Stoßes in einer Entfernung a von der Axe dieselbe, als wenn dieser Stoß auf eine in dieser Entfernung von der Axe befindliche Masse $\frac{Mk^2}{a^2}$ ausgeübt würde.

Eine Masse P (Fig. 106.) stoße in gerader, d. h. auf den beiden Oberflächen in dem Berührungspunkte senkrechter Richtung auf ein materielles System CA mit einer Geschwindigkeit V, und es sei CA ein Perpendikel auf die Richtung des Stoßes von P; so ist, wenn man $CA = a$ setzt, die Wirkung auf dieses System dieselbe, als wenn P auf einen Körper von der Masse $\frac{Mk^2}{a^2}$ stieße. Die Substanzen wollen wir als unelastisch annehmen, so bewegen sich beide Körper nach dem Stoße mit derselben Geschwindigkeit, und da nach dem dritten Bewegungsgesetze das Product aus der Masse und Geschwindigkeit vor und nach dem Stoße dasselbe ist, so hat man, wenn x die Geschwindigkeit von A nach dem Stoße bezeichnet:

$$x\left(P + \frac{Mk^2}{a^2}\right) = PV;$$

folglich:

$$x = \frac{PVa^2}{Pa^2 + Mk^2}.$$

Wenn nach dem Stoße auf den Körper keine Kraft wirkt, so bewegt er sich gleichförmig, und wenn er sich um eine horizontale Axe drehet und die Schwerkraft auf ihn wirkt, so steigt er so lange, bis die ihm mitgetheilte Geschwindigkeit aufgehoben ist, sinkt hierauf wieder herab und schwingt so hin und her. Wenn die Körper elastisch sind, so muss man die Regeln für den Stoß in diesem Falle anwenden. In diesem Falle trennen sich P und M nach dem Stoße, und wenn der Stoß kein gerader ist, so muss man, vorausgesetzt, dass die Körper vollkommen glatt sind, den Theil nehmen, welcher in dem Berührungspunkte auf den Oberflächen der beiden Körper senkrecht ist.

§. 211. Ein auf diesen Prinzipien beruhendes Instrument hat Robins construirt, um damit die Geschwindigkeiten der Flinten- und Kanonenkugeln zu messen, und welches das ballistische Pendel genannt wird. Es besteht aus einer eisernen Platte CA (Fig. 107.), welche in C an einer horizontalen Axe aufgehangen und mit einem dicken Brette DE bedeckt ist. Wenn sich das Pendel in Ruhe befindet und in das Brett eine Kugel P geschossen wird, so bewegt es sich durch einen Bogen MN. Die Sehne dieses Bogens wird durch ein in N an dem Pendel befestigtes Band, welches sich durch eine Oeffnung in M bewegt, bestimmt, so dass, wenn die Länge MN hindurch gezogen ist, sie sich nicht wieder zurückschiebt. Es sei O der Schwingungsmittelpunkt des Pendels mit Einschluss der Kugel, so ist die Bewegung desselben, wenn es sich selbst überlassen bleibt, dieselbe, als wenn die ganze Masse in O vereinigt wäre, und folglich ist der Bogen, in welchem O aufsteigt, dem gleich, durch welchen O beim Herabfallen die Geschwindigkeit erlangen würde, welche O am tiefsten Punkte hatte. Wenn φ diesen Bogen oder Winkel bezeichnet, so ist die während seines Beschreibens erlangte Geschwindigkeit der während des verticalen Falles durch den Sinusversus von φ, oder durch eine senkrechte Höhe $CO.\sin vers.\varphi$ erlangten Geschwindigkeit gleich. Es sei $CO=l$, so ist das Quadrat der Geschwindigkeit von O im tiefsten Punkte

$$=\sqrt{2gl\sin vers\varphi}=2\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{gl}.$$

Aber da die Geschwindigkeit von P in dem tiefsten Punkte nach dem vorhergehenden §.

$$=\frac{PVa^2}{Pa^2+Mk^2}$$

ist, so ist die Geschwindigkeit von O, welche sich zu letzterer wie CO: CP verhält:

$$=\frac{PVal}{Pa^2+Mk^2}=2\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{gl}.$$

Wenn h die Entfernung des Schwerpunktes des Pendels mit Einschluss der Kugel von der Drehungsaxe C bezeichnet, so ist nach §. 203 und 204:

$$l=\frac{Pa^2+Mh^2}{(P+M)k};\quad Pa^2+Mk^2=(P+M)hl;$$

folglich: $$PVal=2\sin\frac{\varphi}{2}(P+M)hl\sqrt{gl},$$

und: $$V=2\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{P+M}{P}\cdot\frac{h}{a}\sqrt{gl}.$$

Wenn das Pendel, nachdem es von der Kugel getroffen ist, n Schwingungen in der Minute macht, so ist die Schwingungszeit $= \frac{60}{n}$ $= \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$; also: $V\overline{gl} = \frac{60\,g}{\pi n}$ und: $V = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{P+M}{P} \cdot \frac{60\,g\,h}{\pi n a}$.

Dieses stimmt mit Hutton's Formel überein, und man erhält $2 \sin \frac{\varphi}{2}$, wenn man die Sehne MN durch den Halbmesser CN dividirt. Hutton selbst hat jedoch bei seinen Versuchen die Geschwindigkeit der Kugeln dadurch bestimmt, dass er die Kanone frei aufhing und den Winkel oder Bogen betrachtete, um welchen sie sich bei dem Heraustreten der Kugel zurückbewegte. Auch in diesem Falle ist die obige Formel anwendbar, nur drückt M jetzt das Gewicht der Kanone und des Zubehörs, aber ohne die Kugel aus; denn die Wirkung ist dieselbe, es mag dem Pendel durch den Stoß der Kugel, oder durch die Rückwirkung eine Geschwindigkeit mitgetheilt werden, und das der Axe der Kanone mitgetheilte Moment ist $= PV$, weil das der Kugel mitgetheilte Moment nach der einen Richtung dem dem Pendel mitgetheilten Momente nach der entgegengesetzten Richtung gleich sein muss. Durch Versuche hat man gefunden, dass sich die Geschwindigkeit der Flinten- und Kanonenkugeln von **1600** bis **2000** Fuß in der Secunde ändert.

Zweiter Abschnitt.

Bewegung rollender oder mit Schnüren umwickelter Körper.

§. **212.** Ein Körper rollt, wenn er sich in Berührung mit einer Linie oder Fläche so bewegt, dass die Theile seiner Oberfläche successive mit den Theilen der Linie oder Oberfläche, worauf er fortrollt, in Berührung kommen. In diesem Falle findet also mit der fortrückenden Bewegung zugleich eine drehende statt, und umgekehrt, und eine Kraft, welche die eine dieser Bewegungen hervorbringt, muss auch die andere hervorbringen.

Wenn das eine Ende einer Schnur an einem Körper befestigt ist, welcher nach der Richtung dieser Schnur fortrollt, so wird diese Schnur entweder auf den Körper, oder von demselben abgewickelt, und es entsteht eine Bewegung, welche der rollenden ähnlich ist.

In allen solchen Fällen bewegt sich der Körper nicht fortwährend um eine feste Axe, und folglich sind hier die Sätze des vorhergehenden

Kapitels nicht unmittelbar anwendbar, sondern wir müssen zu diesem Zwecke folgenden Satz aufstellen.

In allen diesen Fällen nehmen wir an, dass die Bewegungen in Ebenen stattfinden, welche auf der Drehungsaxe senkrecht sind, so dass die augenblickliche Drehungsaxe immer zu der durch den Schwerpunkt, oder durch irgend einen andern Punkt gehenden scheinbaren Drehungsaxe parallel ist.

§. **213.** Aufgabe. Wenn ein Körper ab- oder aufgerollt wird, und der Schwerpunkt sich in einer geraden Linie bewegt, die Mittelkraft der wirksamen beschleunigenden Kräfte und ihr Moment zu finden.

Wir wollen den Körper in zwei auf einander folgenden Secunden seiner Bewegung betrachten, und uns seine gleichzeitig drehende und fortrückende Bewegung so zerlegt denken, dass er sich parallel zu sich selbst bewegt, während sein Schwerpunkt von der anfänglichen in die Endlage kommt und sich dann in dieser letzten Lage drehet, indem der Schwerpunkt in Ruhe bleibt. Auf diese Weise wird die Bewegung des Körpers in jeder Secunde in eine fortrückende und in eine drehende zerlegt.

Die als constant vorausgesetzte wirksame Kraft wird durch den Zuwachs der Geschwindigkeit während einer Secunde gemessen, und wenn die Geschwindigkeit auf die oben erwähnte Weise zerlegt wird, so werden auch die Zuwächse der Geschwindigkeit und mithin auch die wirksamen Kräfte auf diese Weise zerlegt. Die wirksamen Käfte sind also diejenigen, welche resp. der fortrückenden und drehenden Bewegung zugehören.

Wenn f die wirksame beschleunigende Kraft bezeichnet, welche der Bewegung des Schwerpunktes entspricht, so drückt mf die der fortrückenden Bewegung irgend eines materiellen Theilchens m entsprechende bewegende Kraft aus, und die Summe aller dieser Kräfte ist $= \Sigma mf$, oder da sie alle gleich und parallel sind $= f\Sigma m = Mf$, wo M die Masse des Körpers bezeichnet. Auch geht die Mittelkraft aus allen parallelen Kräften mf durch den Schwerpunkt des Körpers und liegt in der Richtung der Bewegung des Schwerpunktes; folglich ist ihr Moment in Beziehung auf irgend einen in dieser Richtung liegenden Punkt $= o$.

Auch die Mittelkraft aller der Rotationsbewegung entsprechenden wirksamen Kräfte ist gleich Null; denn wenn φ die wirksame beschleunigende Kraft eines materiellen Theilchens in der Entfernung $= 1$ von der durch den Schwerpunkt gehenden Drehungsaxe ist, so ist $mr\varphi$

die wirksame bewegende Kraft eines materiellen Theilchens m in der Entfernung r von der Drehungsaxe und wirkt senkrecht auf den Halbmesser r. Wenn x, y die Coordinaten des Punktes m in Beziehung auf rechtwinklige Axen bezeichnen, welche in der Drehungsebene durch den Schwerpunkt gelegt sind, so sind die nach den Richtungen der x und der y gerichteten Seitenkräfte der wirksamen bewegenden Kraft den Seiten des Dreieckes proportional, dessen Seiten y, x und r sind, weil diese drei Seiten resp. auf der wirksamen bewegenden Kraft und auf ihren Seitenkräften senkrecht sind (§. 28.). Wenn man also die Richtungen der Kräfte in Betracht zieht, so sind $m y \varphi$ und $-m x \varphi$ die Seitenkräfte von $m r \varphi$ in den Richtungen der y und x und $\Sigma . m y \varphi$, $\Sigma . -m x \varphi$ sind die resultirenden Kräfte in diesen Richtungen. Aber nach der Eigenschaft des Schwerpunktes ist $\Sigma . m y \varphi = \varphi \Sigma m y = o$, und ebenso $\Sigma . -m x \varphi = -\varphi \Sigma m x = o$. Folglich ist die Mittelkraft aus den der drehenden Bewegung entsprechenden wirksamen Kräften $= o$.

Das Moment der Kraft $m r \varphi$ in Beziehung auf die durch den Schwerpunkt gehende Axe ist $= m r^2 \varphi$ und die Summe aller solcher Momente ist $= \Sigma m r^2 \varphi = \varphi . \Sigma m r^2 = M k^2 \varphi$, wo $M k^2$ das Trägheitsmoment in Beziehung auf die jetzige Axe ist.

Hieraus erhellet, dass die auf das System M wirkenden Kräfte einer Kraft $M f$ gleich sind, welche auf den Schwerpunkt und in der Richtung der Bewegung dieses Punktes wirkt, und dass ihr Moment einem Momente $M k^2 \varphi$ gleich ist, welches den Körper um den Punkt zu bewegen strebt, worin sich der Schwerpunkt in irgend einem Augenblicke befindet, wo f die der Bewegung des Schwerpunktes und φ die der Rotationsbewegung eines materiellen Theilchens, welches sich in einer Entfernung $= 1$ von der durch den Schwerpunkt gehenden Drehungsaxe befindet, entsprechende Kraft bezeichnet.

§. 214. Aufgabe. Um einen cylindrischen Körper M (Fig. 108.) ist eine Schnur ABP gewickelt, welche in senkrechter Richtung über eine feste Rolle geht und an dem andern Ende ein Gewicht P trägt; man soll die Bewegung bestimmen.

Die Spannung der Schnur ABP ist überall dieselbe, wenn die Trägheit der Rolle B unberücksichtigt bleibt, was wir hier annehmen, und die Spannung mit T g bezeichnen wollen. Ferner sei, wie im vorhergehenden §., $M k^2$ das Trägheitsmoment, f die wirksame beschleunigende Kraft an dem Schwerpunkte, φ die wirksame beschleunigende Kraft eines materiellen Theilchens in der Entfernung $= 1$ von der Axe und a der Halbmesser des Cylinders.

Die mitgetheilten bewegenden Kräfte Tg wirken an dem Umfange des Cylinders aufwärts und die auf jedes Theilchen des Körpers wirkende Schwerkraft, welche man sich im Schwerpunkte vereinigt denken kann und $=Mg$ ist, wirkt niederwärts. Die mitgetheilten und wirksamen Kräfte müssen gleiche und entgegengesetzte Mittelkräfte haben und auch ihre Momente müssen nach den Bedingungen des statischen Gleichgewichtes einander gleich und entgegengesetzt sein. Folglich ist nach dem letzten §.:

$$Mg - Tg = Mf$$
$$Tga = Mk^2\varphi.$$

Aber wenn f' die wirksame beschleunigende Kraft ist, welche auf P wirkt, so haben wir ebenso:

$$Pg - Tg = Pf'.$$

Nun ist aber klar, dass, wenn irgend ein Halbmesser CA horizontal liegt, sich der Punkt C mit einer Geschwindigkeit v niederwärts und der Punkt A mit einer Geschwindigkeit v' aufwärts bewegt, die relative Geschwindigkeit von A gegen $C = v + v'$ und die Winkelgeschwindigkeit von A um $C = \frac{v+v'}{a} = \frac{1}{a}(v+v')$ ist. Folglich ist die der drehenden Bewegung entsprechende wirksame beschleunigende Kraft $= \frac{1}{a}(f+f')$; mithin $\varphi = \frac{1}{a}(f+f')$ oder $f + f' = a\varphi$.

Nimmt man die Werthe von f, f' und φ aus den obigen drei Gleichungen, so erhält man:

$$PMg - PTg + PMg - MTg = PTg\frac{a^2}{k^2};$$

folglich: $$2PMk^2 = [Pa^2 + (M+P)k^2]T,$$

und: $$T = \frac{2PMk^2}{Pa^2 + (M+P)k^2},$$

und hieraus ergibt sich:

$$f = \frac{Mg - Tg}{M}$$
$$= \frac{Pa^2 + (M-P)k^2}{Pa^2 + (M+P)k^2} \cdot g,$$
$$f' = \frac{Pg - Tg}{P}$$
$$= \frac{Pa^2 - (M-P)k^2}{Pa^2 + (P+M)k^2} g$$

$$\varphi = \frac{Tga}{Mk^2}$$
$$= \frac{2Pga}{Pa^2 + (M-P)k^2}.$$

Diese Kräfte sind constant; folglich die Bewegung des Schwerpunktes, so wie die von P, niederwärts gerichtet und die drehende Bewegung eine gleichförmig beschleunigte.

Zusatz 1. Wenn f negativ, d. h.

$$Pa^2 + (M-P)k^2 < o, \text{ oder } \frac{M}{P} < \frac{k^2 - a^2}{a^2}$$

ist, so bewegt sich M aufwärts, was aber nur der Fall sein kann, wenn $a < k$ ist.

Zusatz 2. Wenn f′ negativ, d. h.

$$Pa^2 - (M-P)k^2 < o \text{ oder } \frac{M}{P} > \frac{k^2 + a^2}{a^2}$$

ist, so bewegt sich P aufwärts.

Zusatz 3. Es ist nicht nöthig, dass der ganze Körper cylinderförmig ist, sondern nur der Theil, um welchen die Schnur gewickelt ist, braucht ein Cylinder zu sein, dessen Axe durch den Schwerpunkt geht. Die Verticalebene der Schnur muss senkrecht auf der Axe des Cylinders sein und durch den Schwerpunkt desselben gehen.

Zusatz 4. Wenn der Körper eine cylindrische Schale von geringer Dicke ist, so liegt die ganze Masse in einer Entfernung a von dem Mittelpunkte; folglich ist $k = a$,

die beschleunigende Kraft in $C = \frac{Mg}{2P+M}$,

die beschleunigende Kraft in $P = \frac{2P-M}{2P+M} \cdot g$,

und die Spannung $= \frac{2MP}{2P+M}$.

Zusatz 5. Wenn der Körper ein homogener fester Cylinder ist, so ist, wie wir in der analytischen Dynamik sehen werden, $k^2 = \frac{a^2}{2}$; folglich:

die beschleunigende Kraft in $C = \frac{P+M}{3P+M} \cdot g$,

die beschleunigende Kraft in $P = \frac{3P-M}{3P+M} g$,

und die Spannung $= \frac{2MP}{3P+M}$.

§. 215. Aufgabe. Ein cylindrischer Körper wickelt sich von einer verticalen Schnur ab, deren anderes Ende befestigt ist, und man soll die beschlunigende Kraft bestimmen (Fig. 109.).

Wenn wir in dem vorhergehenden §. P so annehmen, dass es sich weder auf-, noch abwärts bewegt, so können wir uns die Schnur AB auch als im Punkte B befestigt denken und die Bewegung bleibt dieselbe wie zuvor. In diesem Falle muss folglich die beschleunigende Kraft von $P = o$ oder:

$$Pa^2 - (M - P)k^2 = o, \text{ folglich } P = \frac{Mk^2}{a^2 + k^2};$$

also auch:

$$T = \frac{Mk^2}{a^2 + k^2}$$

und die beschleunigende Kraft in $C = \frac{(M - T)g}{M} = \frac{a^2 g}{a^2 + k^2}$ sein.

Zusatz 1. Wenn der Körper eine cylindrische Schale ist, so ist $k = a$, folglich die beschleunigende Kraft in $C = \frac{g}{2}$ und $T = \frac{M}{2}$.

Zusatz 2. Wenn der Körper ein homogener fester Cylinder ist, so ist, wie wir in der analytischen Dynamik sehen werden, $k^2 = \frac{a^2}{2}$; folglich die beschleunigende Kraft in $C = \frac{2g}{3}$ und $T = \frac{M}{3}$.

Zusatz 3. Wenn der Körper eine homogene Kugel ist, so ist, wie wir in der analytischen Dynamik sehen werden, $k^2 = \frac{2a^2}{5}$, und folglich die beschleunigende Kraft in $C = \frac{5g}{7}$ und $T = \frac{2M}{7}$.

Zusatz 4. Wenn die Schnur, statt vertical zu sein, auf einer geneigten Ebene BA (Fig. 110.) läge, so fänden noch dieselben Schlüsse statt, wenn man für g die Intensität der Schwerkraft längs der schiefen Ebene substituirt, welche $= g \times \sin$. der Neigung ist, und die Spannnng der Schnur ist ebenfalls $= Tg . \sin$ der Neigung.

Zusatz 5. Wenn der Körper M, statt von einer Schnur, von einer schiefen Ebene vermöge der Wirkung der Reibung, welche das Fortgleiten verhindert, herabrollt, so bleiben die Resultate dieselben und die Spannung der Schnur wird jetzt durch die Wirkung der Reibung ersetzt, welche das Herabgleiten verhindert. Wenn also ein Körper von einer schiefen Ebene herabrollt, so ist die beschleunigende Kraft resp. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ und $\frac{5}{7}$ der Kraft, mit welcher der Körper von dieser Ebene her-

abgleitet, wenn keine Reibung stattfindet, je nachdem dieser Körper ein hohler Cylinder, ein homogener massiver Cylinder, oder eine homogene massive Kugel ist.

Dritter Abschnitt.

Bewegung der Rollen.

§. 216. Aufgabe. Zwei Körper ziehen einander vermittelst einer über eine Rolle gehenden Schnur, und man soll die beschleunigende Kraft bestimmen (Fig. 111.).

Es sei Mk^2 das Trägheitsmoment der Rolle, a ihr Halbmesser und x die wirksame niederwärts gerichtete beschleunigende Kraft von P, welches daher auch die wirksame beschleunigende Kraft an dem Umfange der Rolle M und die aufwärts gerichtete wirksame beschleunigende Kraft von Q ist. Es sei Tg die Spannung der Schnur AP und $T'g$ die von BQ, so ist die dem Umfange der Rolle mitgetheilte Kraft $= Tg - T'g$, und daher nach §. 205:

$$x = \frac{(T - T')\,g\,a^2}{Mk^2}. \qquad (1)$$

Aber die beschleunigende Kraft in P ist $= x = \frac{(P - T)\,g}{P}$

und die in Q $= x = \frac{(T' - Q)}{Q}\,g$;

folglich: $Px = (P - T)\,g$, $Qx = (T' - Q)\,g$;

also: $(P + Q)\,x = (T' - T)\,g + (P - Q)\,g$.... (2)

Wenn man (1) mit Mk^2 und (2) mit a^2 multiplicirt, und die Producte addirt, so erhält man:

$$Mk^2\,x + (P + Q)\,a^2\,x = (P - Q)\,g\,a^2,$$

$$x = \frac{(P - Q)\,g\,a^2}{Mk^2 + (P + Q)\,a^2}.$$

Zusatz 1. Die Spannungen von AP und BQ sind resp.

$$\frac{(Mk^2 + 2Q\,a^2)\,P\,g}{Mk^2 + (P + Q)\,a^2}, \quad \frac{(Mk^2 + 2P\,a^2)\,Q\,g}{Mk^2 + (P + Q)\,a^2}.$$

Zusatz 2. Wenn also über Rollen gehende Schnüre in Bewegung sind, so ist die Spannung eines jeden nicht mehr durch die ganze Länge dieselbe; ein Theil der Spannung von PA wird zur Drehung von M angewandt und nur der noch übrige Theil wirkt längs der Schnur wie in BQ.

Dieselben Resultate hätten sich aus §. 210. ableiten lassen, wenn man die Halbmesser des Rades und der Welle einander gleich gesetzt hätte.

§. 217. Aufgabe. Bei der einfachen beweglichen Rolle mit parallelen Schnüren (Fig. 112.) die beschleunigende Kraft zu bestimmen.

Es seien P, Q die beiden Gewichte, Mk^2, $M'k'^2$ die Trägheitsmomente der festen und beweglichen Rolle AB, DE; ferner a, a' ihre Halbmesser und die Spannung von $AP = Tg$, die von $BD = T'g$ und die von $EF = t'g$; so ist, wenn x die beschleunigende Kraft von P bezeichnet, $\frac{x}{2}$ die beschleunigende Kraft des Gewichtes Q, weil es sich mit einer halb so großen Geschwindigkeit bewegt. Ferner ist die beschleunigende Kraft an dem Umfange von $M = x$ und da der Mittelpunkt von M' mit der halben Geschwindigkeit steigt, während E unbeweglich bleibt; so geschieht die relative Bewegung von E um den Mittelpunkt mit der halben Geschwindigkeit von P und folglich ist die wirksame beschleunigende Kraft an dem Umfange von M' um $C = \frac{x}{2}$.

Wenn wir nun die auf M' wirkenden Kräfte betrachten, so wirken die mitgetheilten Kräfte $T'g$, $t'g$ aufwärts und Qg niederwärts, wo in Q das Gewicht von M' mit begriffen ist. Die wirksame beschleunigende Kraft $\frac{x}{2}$ von Q ist aufwärts gerichtet, und da $\frac{x}{2}$ an dem Umfange wirkt, so wird die Rolle M' um C' gedrehet; folglich ist die Kraft um $C' = \frac{x}{2a}$ in die Entfernung $= 1$, und das Moment um C' ist nach §. 213. $= \frac{x}{2} \cdot \frac{M'k'^2}{a'}$.

Nach §. 202. muss man also haben:

$$(T' + t')g - Qg = Q\frac{x}{2},$$

und wenn man die Momente in Beziehung auf C' betrachtet:

$$(T' - t')a'g = \frac{M'k'^2}{a'} \cdot \frac{x}{2}, \text{ oder } (T' - t')g = \frac{M'k'^2}{a'^2} \cdot \frac{x}{2};$$

folglich, wenn man diese beiden Gleichungen zusammenaddirt:

$$2T'g - Qg = Q\frac{x}{2} + \frac{M'k'^2}{a'^2} \cdot \frac{x}{2}.$$

Ferner ist wie vorhin:

$$x = \frac{P - T}{P}g, \text{ oder } (P - T)g = Px,$$

$$x = \frac{(T - T')ga^2}{Mk^2}, \text{ oder } (T - T')g = \frac{Mk^2}{a^2}x,$$

und wenn man diese beiden letzten Gleichungen nebst der Summe der vorhergehenden, nämlich:

$$T'g = \frac{Qg}{2} + \frac{Qx}{2^2} + \frac{M'k'^2}{a'^2} \cdot \frac{x}{2^2}$$

zusammenaddirt, so hat man:

$$Pg = \frac{Qg}{2} + \left(P + \frac{Q}{2^2} + \frac{Mk^2}{a^2} + \frac{M'k'^2}{2^2 a'^2}\right)x;$$

also:

$$x = \frac{\left(P + \frac{Q}{2}\right)g}{P + \frac{Q}{2^3} + \frac{Mk^2}{a^2} + \frac{M'k'^2}{2^2 a'^2}},$$

woraus also die Spannungen gefunden werden können.

§. 218. Aufgabe. In dem Systeme beweglicher Rollen, worin jede Rolle an einer besondern Schnur hängt, die beschleunigende Kraft zu finden, wenn die Schnüre als zu einander parallel angenommen werden. (Fig. 113.)

Es seien $M, M', M'', M''', \ldots$ die Rollen, $Mk^2, M'k'^2, M''k''^2, M'''k'''^2, \ldots$ ihre Trägheitsmomente und $a, a', a'', a''', \ldots$ ihre Halbmesser. Es sei x die wirksame beschleunigende Kraft an P, so ist die an $M' = \frac{x}{2}$, die an $M'' = \frac{x}{2^2}$, die an $M''' = \frac{x}{2^3}, \ldots$ und diese sind, wie in dem vorhergehenden §., auch die wirksamen beschleunigenden Kräfte, welche an den Umfängen von $M, M', M'', M''', \ldots$ die Drehung hervorbringen. Schließt man nun in Beziehung auf jede Rolle, wie in dem vorhergehenden §. in Beziehung auf M', so erhält man die Gleichungen:

$$(P - T)g = Px, \quad (T - T')g = \frac{Mk^2}{a^2}x,$$

$$(T + t')g - M'g - T''g = M'\frac{x}{2}, \quad (T' - t')g = \frac{M'k'^2}{a'^2} \cdot \frac{x}{2},$$

$$(T'' + t'')g - M''g - T'''g = M''\frac{x}{2^2}, \quad (T'' - t'')g = \frac{M''k''^2}{a''^2} : \frac{x}{2^2},$$

u. s. f. und eliminirt man $t', t'', \ldots$ zwischen je zwei auf einander folgenden dieser Gleichungen, so erhält man:

$$Pg = Px + Tg,$$

$$Tg = \frac{Mk^2}{a^2}x + T'g,$$

$$T'g = \frac{M'k'^2}{a'^2} \cdot \frac{x}{2^2} + \frac{M'x}{2^2} + \frac{M'g}{2} + \frac{T''g}{2},$$

$$T''g = \frac{M''k''^2}{a''^2} \cdot \frac{x}{2^3} + \frac{M''x}{2^3} + \frac{M''g}{2} + \frac{T''g}{2},$$

u. s. f.; folglich:

$$Pg = Px + \frac{Mk^2}{a^2}x + \frac{M'k'^2}{a'^2}\cdot\frac{x}{2^2} + \frac{M''k''^2}{a''^2}\cdot\frac{x}{2^4} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{M'x}{2^2} + \frac{M''x}{2^4} + \text{etc.} + \frac{M'g}{2} + \frac{M''g}{2^2} + \text{etc.} + \frac{T^{IV}\cdot g}{2^3}.$$

Das Fortschreitungsgesetz ist in die Augen fallend, und die letzte Spannung (in der Figur T^{IV}) bewirkt unmittelbar das Steigen von Q. Es ist also die wirksame beschleunigende Kraft an $Q = \frac{x}{2^3} = \frac{(T^{IV} - Q)g}{Q}$; folglich:

$$T^{IV}g = Qg + Q\frac{x}{2^3},$$

und wenn man diesen Werth in den von x substituirt, so erhält man:

$$x = \frac{\left(P - \frac{M'}{2} - \frac{M''}{2^2} - \text{etc.} - \frac{Q}{2^3}\right)}{P + \frac{Mk^2}{a^2} + \frac{M'}{2^2} + \frac{M'k'^2}{2^2\cdot a'^2} + \frac{M''}{2^4} + \frac{M''k''^2}{2^4\cdot a''^4} + \text{etc.} + \frac{Q}{2^6}},$$

und ebenso für eine beliebige Anzahl von Rollen.

Durch ähnliche Betrachtungen erhält man die beschleunigende Kraft für ein Rollensystem, worin jede Schnur an der Last befestigt ist; allein directer gelangt man in allen solchen Fällen durch Anwendung des folgenden Satzes zum Ziele.

§. 219. Aufgabe. Die beschleunigende Kraft zu finden, welche an irgend einer Maschine, worin die Verhältnisse der Geschwindigkeiten verschiedener Punkte constant sind, aus der Wirkung der Schwere entspringt.

Es sei P einer der Theile der Maschine und P′ die Masse, welche an P das Gleichgewicht erhält, so ist das Gewicht $(P - P')g$ die mitgetheilte Kraft, welche die Bewegung erzeugt. Es sei u die Geschwindigkeit von P und v, v′, ... die Geschwindigkeiten irgend welcher anderer Theile m, m′, ... des Systemes. Wenn x die wirksame beschleunigende Kraft von P ist, so ist, da die Kräfte in dem letzten Verhältnisse der Zuwächse der Geschwindigkeiten stehen, $x\frac{dv}{du}$ die beschleunigende Kraft an m und $mx\frac{dv}{du}$ die wirksame bewegende Kraft an m. Die Kräfte, welche einander nach §. 199. das Gleichgewicht halten müssen, sind also nach der einen Richtung $(P - P')g$

etc. und in der entgegengesetzten Richtung Px, $mx\frac{dv}{du}$, $m'x\frac{dv'}{du'}$, etc.

Nun können aber $u, v, v', \ldots$ als die virtuellen Geschwindigkeiten der Punkte betrachtet werden, woran diese Kräfte angebracht sind, und folglich ist nach dem Prinzipe der virtuellen Geschwindigkeiten (s. analytische Statik §. 22.):

$$(P-P')gu - Px.u - mx\frac{dv}{du}v - m'x\frac{dv'}{du}v' - \text{etc.} = 0;$$

folglich:

$$x = \frac{(P-P')g}{P+\frac{mv}{u}\cdot\frac{dv}{du}+\frac{m'v'}{u}\cdot\frac{dv'}{du}+\text{etc.}} = \frac{(P-P')g}{P+\Sigma\frac{mv}{u}\cdot\frac{dv}{du}}.$$

Eine Masse M, welche irgend einen Theil des Systemes bildet, werde für einen Augenblick als um eine feste Axe beweglich betrachtet, welches immer eine mögliche Vorstellungsweise der Bewegung ist, und es sei a die Entfernung des Schwerpunktes von M von der angenommenen festen Axe, und die Geschwindigkeit dieses Schwerpunktes $= \alpha$; so ist die Geschwindigkeit eines Theilchens m von M, welches sich in einer Entfernung r von der Axe befindet, $= \frac{r\alpha}{a}$; folglich $v = \frac{r\alpha}{a}$, $\frac{dv}{du} = \frac{r}{a}\cdot\frac{d\alpha}{du}$, und für die ganze Masse von M:

$$\Sigma.\frac{mv}{u}\cdot\frac{dv}{du} = \Sigma.\frac{mr^2\alpha}{a^2u}\cdot\frac{d\alpha}{du} = \frac{\alpha}{a^2u}\cdot\frac{d\alpha}{du}\Sigma mr^2$$

$$= \frac{\alpha}{a^2u}\frac{d\alpha}{du}M(a^2+k^2) = M\frac{\alpha}{u}\cdot\frac{d\alpha}{du}+M\frac{k^2\alpha}{a^2u}\cdot\frac{d\alpha}{du} \quad (\text{§. 204.}).$$

In dem Nenner des Ausdruckes für die beschleunigende Kraft x müssen also für jede Masse M zwei Glieder, wie die eben gefundenen, vorkommen, wovon das eine von der Quantität der Materie M und das andere von dem Trägheitsmomente Mk^2 abhängt.

Wenn die Maschine so beschaffen ist, dass die Geschwindigkeiten der Theile desselben Stückes in einem constanten Verhältnisse zu einander stehen, so sei $\alpha = nu$, wo sich n nicht mit der Zeit ändert, und alsdann ist:

$$\frac{d\alpha}{du} = n = \frac{\alpha}{u}, \quad \frac{\alpha}{u}\cdot\frac{d\alpha}{du} = \frac{\alpha^2}{u^2},$$

und folglich sind die der Masse M entsprechenden beiden Glieder des Nenners des Ausdruckes für x:

$$M.\frac{a^2}{u^2}+M\frac{k^2\alpha^2}{a^2u^2}.$$

Ferner ist $\frac{\alpha}{a}$ die Winkelgeschwindigkeit der Masse M um ihren Schwerpunkt, und wenn folglich ω diese Winkelgeschwindigkeit bezeichnet, so sind die beiden der Masse M entsprechenden Glieder:

$$M\frac{\alpha^2}{u^2}+M\frac{k^2\omega^2}{u^2}.$$

Aus einer nähern Vergleichung erhellet leicht, dass in diesem letzten Satze alle vorhergehenden Sätze dieses Kapitels enthalten sind.

Achtes Kapitel.

Ueber die Reibung der in Bewegung befindlichen Körper.

§. **220.** Wenn sich zwei Körper so bewegen, dass ihre Oberflächen an einander hingleiten, oder über einander hinrollen, so findet zwischen denselben eine Reibung statt, welche ihre Bewegung zu verändern strebt, indem sie die durch eine gegebene Kraft hervorgebrachte Bewegung vermindert, und bewirkt, dass zur Hervorbringung einer gegebenen Bewegung eine größere Kraft erfordert wird.

Die Reibung eines Schlittens oder eines Räderfuhrwerkes, worauf ein Körper längs einer Straße fortgezogen wird, die Reibung eines sich um eine feste Achse drehenden Rades, die Reibung der Zapfen, Gelenke, Kolbenstangen und Ventile der Pumpen, Dampfmaschinen und anderer Maschinen finden alle auf diese Weise statt.

Die Reibung der in Bewegung befindlichen Körper ist von verschiedener Art, nämlich:

1. Gleitende Reibung.

§. **221.** Diese Reibung findet statt, wenn sich ein Körper längs einer Oberfläche hinbewegt, die er stets mit demselben Theile seiner Oberfläche berührt, wie ein auf dem Schnee fortgezogener Schlitten, oder ein auf dem Eise fortgeschleuderter platter Stein. Eine Reibung derselben Art findet statt, wenn sich eine Achse in einem Loche, oder an den Seiten einer Pfanne drehet, oder ein Körper auf einem Zapfen, wie ein Kreisel; jedoch ist sie nicht von derselben Größe. In allen solchen Fällen bewirkt die Reibung mit der Zeit das Aufhören der Bewegung, wenn sie nicht durch die Wirkung irgend einer Kraft erhal-

ten wird, und zur Erhaltung einer gleichförmigen Bewegung wird eine desto größere Kraft erfordert, je größer die Reibung ist.

2. Rollende oder wälzende Reibung.

§. 222. Wenn ein Cylinder auf einer horizontalen Ebene fortrollt, so ist der seiner Bewegung entgegenwirkende Widerstand zwar kleiner, als wenn er auf dieser Ebene fortgleitet; aber dieser Widerstand verschwindet doch nicht ganz, und man sieht leicht ein, dass in diesem Falle der Widerstand nicht sowohl von der eigentlichen Reibung, als von der Adhäsion der Oberflächen herrührt, weil diese Oberflächen nicht auf einander hingleiten. Diese Art von Reibung kann bei statischen Aufgaben unberücksichtigt bleiben; aber für den Fall der Bewegung hat man gefunden, dass sich die Reibung rollender Cylinder direct wie der Druck und umgekehrt wie der Durchmesser derselben verhält. Hieraus sieht man, dass große Räder hinsichtlich der Reibung vortheilhafter sind, als kleine.

Wenn ein Cylinder von Mahagoni und von einem Durchmesser von 3 Zoll auf einer Ebene von Eichenholz fortrollt, so beträgt die Reibung $\frac{1}{16}$ des Druckes, und wenn derselbe Cylinder auf einer Ebene von Ulmenholz fortrollt, so beträgt die Reibung nur $\frac{1}{100}$ des Druckes.

3. Reibung der Wagenräder.

§. 223. Während die Räder der Fuhrwerke auf der Straße fortrollen, drehet sich die Achse in der Nabe, und folglich besteht die Gesammtreibung der Räder aus zwei verschiedenen Theilen, nämlich aus der rollenden Reibung des Radkranzes und der gleitenden (drehenden) Reibung der Achse, so dass die ganze Reibung vermindert wird, wenn einer ihrer beiden Theile durch irgend eine Ursache vermindert wird, z. B. wenn der Radkranz glätter, oder die Achse mit einer fettigen Substanz geschmiert wird.

In allen diesen Fällen ist die Reibung einem gewissen Drucke gleich, welcher nach der, der Bewegung des Körpers entgegengesetzten Richtung wirkt und seine Geschwindigkeit verzögert, oder zu dessen Ueberwindung eine gewisse nach der Richtung der Bewegung wirkende Kraft erforderlich ist.

§. 224. In der Statik werden die Kräfte nicht als Bewegung hervorbringend oder abändernd, sondern als die Körper, worauf sie wirken, blos im Gleichgewichte, oder in Ruhe erhaltend betrachtet.

Aber Kräfte, welche einen Körper in einer gleichförmigen Bewegung erhalten, halten genau den der Bewegung entgegenwirkenden Wi-

derständen das Gleichgewicht; denn die Körper selbst verhalten sich gegen den Zustand der Ruhe oder der Bewegung ganz indifferent, und bewegen sich gleichförmig fort, wenn die Widerstände der Bewegung aufgehoben werden, oder denselben das Gleichgewicht gehalten wird, wie wir bei der Erörterung des dritten Bewegungsgesetzes gesehen haben.

Die Kräfte also, welche eine gleichförmige Bewegung hervorbringen, können nach statischen Prinzipien behandelt werden, so dass sich die von ihnen hervorgebrachten Wirkungen durch diese Prinzipien mit Zuziehung des ersten Bewegungsgesetzes bestimmen lassen.

Lehrsatz. Wenn sich ein Körper vermöge der Wirkung einer Kraft auf einer horizontalen Ebene fortbewegt, und die Kraft genau der Reibung des Körpers auf dieser Ebene gleich ist, so muss er sich mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit fortbewegen.

Denn die Kraft, welche den Körper vorwärts treibt, und der durch die Reibung verursachte Widerstand sind zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte, deren Wirkungen sich gegenseitig aufheben; der Körper bewegt sich also, als wenn gar keine Kraft auf ihn wirkte, und er muss sich mithin nach dem ersten Bewegungsgesetze gleichförmig bewegen.

Wenn also für einen sich auf einer Horizontalebene fortbewegenden Körper die Reibung $\frac{1}{n}$ seines Gewichtes beträgt, so wird derselbe durch eine nach horizontaler Richtung wirkende Druckkraft, welche seinem nfachen Gewichte gleich ist, in einer gleichförmigen Bewegung erhalten.

§. **225.** Die Kraft, welche erfordert wird, um einen Körper in einer gleichförmigen Bewegung zu erhalten, wird zuweilen Zugkraft genannt. Bei den Rädern der Fuhrwerke ist, wie bereits oben bemerkt, die Zugkraft nach der verschiedenen Beschaffenheit der Räder selbst und der Straße verschieden. Bei Fuhrwerken der gewöhnlichen Art und unter den gewöhnlichen Umständen haben die neuesten Versuche folgende Resultate gegeben:

Die Zugkraft ändert sich bei einem guten horizontalen Pflaster für jede Tonne zwischen **32** und **39** Pfd. Bei einem Wagen von **21** Centner **8** Pfd. Gewicht betrug die Zugkraft zur Fortbewegung desselben über ein gutes Pflaster in Piccadilly **33** bis **40** Pfd. An einer Stelle, wo das Pflaster uneben und schon ausgefahren war, betrug die erforderliche Zugkraft **48** Pfd.; aber man kann annehmen, dass die Zugkraft auch bei dem besten neugelegten Pflaster **32** Pfd. für

die Tonne, oder $\frac{1}{70}$ der ganzen Last beträgt. Auf einer Chaussee von klein geschlagenen Kieselsteinen beträgt die Zugkraft ungefähr **64** Pfd., ist also doppelt so groß, als auf einem Pflaster. Auf einer sandigen Straße beträgt die Zugkraft **150** Pfd. für die Tonne, oder $\frac{1}{15}$ der ganzen Last, und auf einer Straße von klein geschlagenen Steinen, die ein unebenes Pflasterbett hat, beträgt die Zugkraft **45** Pfd. für die Tonne oder $\frac{1}{50}$ der ganzen Last.

Auf einer gut construirten horizontalen Eisenbahn beträgt dagegen die Zugkraft nur $\frac{1}{240}$ bis $\frac{1}{300}$ der fortzuziehenden Last.

§. **226.** Lehrsatz. Die Wirkung der Reibung ist bei in Bewegung befindlichen Körpern fast von der Geschwindigkeit unabhängig.

Dieses wird durch die Erfahrung dargethan; denn Coulomb hat in einer Reihe, mit vieler Genauigkeit und in einem großen Maßstabe angestellter Versuche gefunden, dass die Bewegung von Körpern, welche sich vermöge der Wirkung einer constanten Zugkraft, die größer war, als die zur Erhaltung der gleichförmigen Bewegung erforderliche, längs einer Ebene fortbewegten, eine gleichförmig beschleunigte war, und folglich muss die beschleunigende Kraft constant gewesen sein (§. **114.**), mithin auch die Druckkraft, welche die Bewegung hervorbrachte (§. **126.**). Aber diese Druckkraft war der Ueberschuss der Zugkraft über die Reibung, und da die erste constant ist, so muss auch die letzte constant sein.

Auch ergibt sich aus Versuchen, dass die der Bewegung eines Körpers entgegenwirkende Reibung während dieser Bewegung kleiner ist, als bei dem Beginnen der Bewegung, und nach Euler soll die erstere nur halb so groß sein, als die letztere; allein in einigen Fällen scheint erstere noch kleiner zu sein. Coulomb fand, dass die Reibung von Holz auf Holz im Anfange der Bewegung in dem Verhältnisse von **2:9** kleiner war, als den Augenblick zuvor, indem die Geschwindigkeit der Bewegung von keinem Einflusse war; aber insofern die Reibung von der Unebenheit der sich berührenden Flächen herrührt, nimmt sie mit der Geschwindigkeit zu.

§. **227.** Lehrsatz. Wenn die Reibung der Fuhrwerke auf einer Straße vermindert wird, so müssen auch die höchsten Steigungen der Straße verhältnissmäßig vermindert werden, wenn die zur Fortbewegung von Lasten erforderliche Zugkraft in einem entsprechenden Maße vermindert werden soll.

Die abhängigen Strecken einer Straße können als geneigte Ebenen betrachtet werden, und die Kraft, welche erforderlich ist, ein Gewicht auf diesen geneigten Ebenen im Gleichgewichte zu erhalten, ist dem Theile des Gewichtes gleich, welcher durch einen Bruch ausgedrückt wird, dessen Zähler die verticale Höhe und dessen Nenner die Länge der geneigten Ebene ist. Wenn also die Steigung der geneigten Ebene **1** Fuß für jede **20** Fuß ihrer Länge beträgt, so ist die Kraft, welche das Herabrollen eines Wagens verhindern kann, wenn die Reibung nicht in Betracht gezogen wird, $\frac{1}{20}$ des Gewichtes des beladenen Wagens (§. **38**.).

Die Kraft, welche die Ladung eben im Gleichgewichte zu erhalten vermag, ist nach §. **225**. der Zugkraft gleich, welche erfordert wird, um den Wagen in einer gleichförmigen Bewegung zu erhalten, und die Zugkraft muss sowohl die Reibung, als den von der schiefen Ebene herrührenden Widerstand überwinden, oder im Gleichgewichte halten. Die Reibung auf der schiefen Ebene kann als der auf horizontaler Straße gleich angenommen werden; denn der Druck ist fast derselbe.*)

Auf einer Straße, worauf die horizontale Reibung $\frac{1}{12}$, und die größte Steigung $\frac{1}{20}$ beträgt, ist die kleinste erforderliche Zugkraft $\frac{1}{12}$, und die größte $\frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{2}{15}$, und folglich ist die letztere $1\frac{2}{5}$ mal größer, als die erstere.

Wenn die Reibung auf $\frac{1}{60}$ vermindert wird, indem die Steigung dieselbe bleibt, so ist jetzt die größte erforderliche Zugkraft $= \frac{1}{60} + \frac{1}{20} = \frac{1}{15}$; also **4** mal größer als die kleinste erforderliche Zugkraft. Wenn also die kleinste Zugkraft auf $\frac{1}{5}$ ihres frühern Werthes reducirt wird, so beträgt die größte Zugkraft nur $\frac{1}{2}$ ihres frühern Werthes, und nur eine dieser letztern gleiche Zugkraft ist zur Fortbewegung der Last geeignet.

Aber wenn die Steigung nun vermindert wird, so dass ihr größter Werth $\frac{1}{45}$ beträgt, so ist die größte Zugkraft jetzt $= \frac{1}{60} + \frac{1}{45} = \frac{7}{180}$; also $2\frac{1}{3}$ mal größer als die kleinste Zugkraft und $\frac{7}{24}$ von der frühern größten Zugkraft.

Wenn die Straße eine Eisenbahn ist, worauf die Reibung nur $\frac{1}{240}$ der Ladung und die Steigung wieder $\frac{1}{20}$ beträgt, so kann die Ladung nur durch eine Kraft $= \frac{1}{240} + \frac{1}{20} = \frac{13}{240}$ die Rampe hinaufbewegt werden, d. h. es ist auf diesem Theile der Bahn zur Fortbe-

---

*) Nach §. **38**. verhält sich der Druck auf die schiefe Ebene zu dem Gewichte des beladenen Wagens wie der Cosinus der Neigung der Ebene zu dem Halbmesser der Tafeln, und bei einer schiefen Ebene, deren Steigung **1** Fuß auf **20** Fuß ihrer Länge beträgt, ist der Druck auf dieselbe nur um $\frac{1}{800}$ kleiner, als auf die horizontale Ebene.

wegung der Last eine 13 mal größere Kraft erforderlich, als auf horizontaler Bahn. Aber wenn die Steigung kleiner ist, und z. B. nur $\frac{1}{300}$ beträgt, so ist die größte erforderliche Zugkraft $\frac{1}{240} + \frac{1}{300} = \frac{3}{400}$.

Neuntes Kapitel.

Ueber die Messung bewegender Kräfte und die Leistung oder den Effect der Maschinen.

§. 228. Als bewegende Kräfte werden Gewichte, Wind, Wasser, Dampf, thierische Kräfte ꝛc. angewandt, welche vermittelst gewisser Vorrichtungen gewisse gewünschte Effecte hervorbringen, und die Beschaffenheit des hervorgebrachten Effectes ist nach der besondern Einrichtung der angewandten Maschinerie sehr verschieden; aber in allen Fällen ist eine ursprüngliche bewegende Kraft erforderlich, welche irgend einen Effect hervorbringt, und dieser hervorgebrachte Effect steht zu der bewegenden Kraft in einem gewissen Verhältnisse, welches wir hier näher betrachten wollen.

Wenn z. B. ein Pferd einen Karren zieht, eine Wasser- oder Windmühle Getraide mahlt, eine feststehende Dampfmaschine das Erz aus den Gruben hebt, oder eine Locomotive eine Last auf einer Eisenbahn fortbewegt; so nehmen wir in allen diesen Fällen an, dass die Geschwindigkeit, mit welcher der Effect hervorgebracht wird, gleichförmig ist, und stellen daher folgenden Lehrsatz auf:

§. 229. Lehrsatz. Wenn irgend eine Maschine irgend einen Effect hervorbringt, so wird die angewandte Druckkraft in statischem Sinne als dem überwundenen Widerstande gleich betrachtet.

In den vorhin erwähnten Fällen, so wie in allen übrigen, wird die Druckkraft als mit unveränderlicher Stärke wirkend angenommen. Bei den Fuhrwerken ist diese Druckkraft der Reibung der Räder auf der Straße, der Reibung der übrigen sich drehenden Theile und der relativen Schwere der Ladung auf der geneigten Ebene, wenn die Straße nicht horizontal ist, gleich. Bei den Mühlen wird das Getraide durch verschiedene mechanische Vorrichtungen zwischen die Mühlsteine gebracht und geschrotet, wenn sich einer derselben über dem andern drehet, und der dieser Drehung entgegenwirkende Widerstand muss durch eine Druckkraft überwunden werden, wenn die Mühle in Thätigkeit bleiben soll. In dem Falle, wo, wie bei dem Zutagefördern der Erze, ein Gewicht gehoben werden muss, muss die Kraft dem zu hebenden Gewichte gleich sein, und wenn eine Locomotive sich fortbewegt; so

muss sie in der Richtung der Bewegung einen Drucküberschuss hervorbringen, welcher der Reibung und den übrigen Widerständen gleich ist. Aber Druckkräfte der eben erwähnten Art halten dem Widerstande der Bewegung gerade nur das Gleichgewicht und bringen folglich keine Bewegung hervor; jedoch wird durch den kleinsten Drucküberschuss Bewegung erzeugt, und wenn derselbe als fortwährend stattfindend angenommen wird; so bleibt die Maschine in Thätigkeit, und da wir hier die Geschwindigkeit nicht in Betracht ziehen, so kann dieser Drucküberschuss so klein angenommen werden, dass er in Vergleich zu der Hauptkraft, welche erfordert wird, um den Widerständen das Gleichgewicht zu halten, unberücksichtigt bleiben kann. Es ist also die Kraft, welche den Widerständen das Gleichgewicht hält, auch hinreichend, die Maschine in einem Zustande der gleichförmigen Bewegung zu erhalten, wobei aber zu bemerken ist, dass die Widerstände für den Bewegungszustand bestimmt sind.

In manchen Fällen ist jedoch die Wirkung der Maschine nicht gleichförmig, sondern unterbrechend oder alternirend, wie bei den gewöhnlichen Pumpen, wo bei der aufwärts gerichteten Bewegung des Kolbens nur eine Wassersäule gehoben wird, und der Kolben wieder bis zum Boden des Pumpenstiefels herabbewegt werden muss, ehe eine zweite Wassersäule gehoben werden kann. In solchen Fällen betrachten wir blos die Zeit, während welcher die Maschine wirklich einen Effect hervorbringt, und die während des Zeitraumes, in welchem keine Wirkung hervorgebracht wird, angewandte Kraft kann durch Maschinenvorrichtungen auf verschiedene Weise beliebig vermindert werden, welches z. B. in dem ebenerwähnten Falle der Pumpe durch Verminderung der Trägheit und der Reibung des Kolbens und der übrigen beweglichen Theile bewirkt werden kann, und die Wirkung der Pumpe kann dadurch stetig gemacht werden, dass man zwei Pumpen so mit einander verbindet, dass sich der Kolben einer derselben aufwärts bewegt, während sich der der andern niederwärts bewegt.

Das allgemeine Mittel, dessen man sich in solchen Fällen bedient, ist das Schwungrad, welches entweder vermittelst einer stetig oder einer unterbrochen, oder alternirend wirkenden Kraft in Bewegung erhalten wird, und die Gleichförmigkeit der Bewegung der übrigen Maschinentheile bewirkt.

§. **230.** Lehrsatz. Die Leistung oder der Effect einer bewegenden Kraft wird zugleich durch den ausgeübten Druck und durch den Raum, innerhalb dessen dieser Druck wirkt, bestimmt.

Denn wenn der Druck, welcher erforderlich ist, um die Maschine

in Bewegung zu erhalten, in irgend einem Verhältnisse zunimmt, so nimmt der hervorgebrachte Effect in demselben Verhältnisse zu. Wenn z. B. in den oben angeführten Fällen das Gewicht des beladenen Wagens oder das der gehobenen Masse doppelt so groß wird, und der Raum, durch welchen sich der Wagen oder das Gewicht bewegt, derselbe bleibt; so ist die Leistung oder der hervorgebrachte Effect offenbar doppelt so groß, und dasselbe findet bei jedem andern Verhältnisse der Zunahme der bewegten Masse statt. Die Leistung oder der Effect wird auch dadurch in einem gegebenen Verhältnisse vergrößert, wenn der Raum, durch welchen der Widerstand bewegt wird, in diesem Verhältnisse vergrößert wird, und es ist z. B. die Leistung doppelt so groß, wenn ein Wagen mit derselben Last statt um eine Meile, um zwei Meilen fortbewegt, oder wenn ein Gewicht, statt um **10** Fuß, um **20** Fuß gehoben wird, und eben so ist die Leistung während einer doppelten Umdrehung des Mühlsteines bei demselben Widerstande doppelt so groß, als bei einem einfachen Umlaufe, und dasselbe gilt allgemein. Die Leistung oder der hervorgebrachte Effect hängt also sowohl von der ausgeübten Druckkraft, als von dem Raume, durch welchen der Widerstand bewegt ist, ab, und kann durch das Product aus den Zahlenwerthen dieser beiden Größen gemessen werden.

Zusatz. Nach dieser Messungsart der Leistung oder des Effectes einer Maschine wird derselbe nicht geändert, wenn man das Product, wodurch er ausgedrückt wird, in zwei andere Factoren zerlegt, wovon der eine die Druckkraft und der andere den beschriebenen Raum ausdrückt. Wenn z. B. **1000** Pfd. durch einen Raum von **20** Fuß gehoben werden sollen, so wird nach dem Vorhergehenden die Größe der Leistung oder des Effectes ausgedrückt durch 1000×20, und der hervorgebrachte Effect bleibt noch derselbe, wenn **100** Pfd. um **200** Fuß gehoben werden. Dieses findet auch statt bei der Anwendung von Maschinen, nur kann in diesem Falle die Zeit der Wirkung verändert werden.

§. **231.** Lehrsatz. Die Leistung oder der Effect einer bewegenden Kraft bleibt dieselbe, sie mag direct, oder vermittelst irgend einer Maschine wirken.

Denn es sei f der während des Beschreibens des kleinen Raumes s von der bewegenden Kraft direct ausgeübte Druck, F der durch die Maschine ausgeübte Druck, und S der s entsprechende Raum; so halten f und F nach §. **229** einander an der Maschine das Gleichgewicht, und s und S sind kleine Räume, durch welche sich die Maschi-

nentheile, woran f und F wirken, in derselben Zeit bewegen, und folglich ist nach §. 43, $f \times s = F \times S$. Nun ist aber $f \times s$ der Effect, welchen die direct wirkende bewegende Kraft während des Beschreibens des Raumes s hervorbringt, und $F \times S$ ist der Effect, welchen die bewegende Kraft vermittelst der Maschine in derselben Zeit hervorbringt; folglich ist der Satz einleuchtend.

Wenn z. B. ein Mensch, welcher **150** Pfd. schwer ist, in der Stunde auf einer Leiter **1000** Fuß steigt, so hat er einen Effect von $\mathbf{150 \times 1000 = 150{,}000}$ hervorgebracht, und wenn derselbe Mensch an einer Tretmühle vermittelst irgend welcher Maschinerien während des Beschreibens eines Raumes s einen Druck f ausübt, so ist der von ihm hervorgebrachte Effect $= f \times s = \mathbf{150 \times 1000 = 150{,}000}$, von welcher Beschaffenheit die Maschinerie auch sein mag.

Wenn eine geradlinige Bewegung in eine drehende verwandelt wird, wie die geradlinige Bewegung des Kolbens einer Dampfmaschine vermittelst einer Kurbel in die drehende Bewegung des Schwungrades, so bleibt noch derselbe Satz gültig, und es ist daher, da einer Umdrehung des Schwungrades ein doppelter Kolbenzug entspricht, das Product aus dem auf den Kolben ausgeübtem Drucke und der Länge des doppelten Kolbenlaufes gleich dem Producte aus dem Drucke, welcher senkrecht auf irgend einen der Halbmesser des Schwungrades wirkt, und dem diesem Halbmesser entsprechenden Kreisumfange. Dieses lässt sich auch leicht für einen beliebig kleinen Theil und folglich auch für die ganze Bewegung durch elementare mechanische Prinzipien darthun.

Die senkrecht auf den Halbmesser des Schwungrades wirkende Kraft ist erforderlich, um die Widerstände aufzuheben, und die Maschine in einem regelmäßigen Bewegungszustande zu erhalten. Wir betrachten hier nicht die Kraft, durch welche das Moment des Schwungrades von der Ruhe aus erzeugt wird; sondern die Kraft, durch welche dieses Moment, wenn es einmal erlangt ist, fast gleichförmig erhalten wird.

In den bisher betrachteten Fällen wurde die Leistung oder der Effect durch die ganze Wirkung der Maschine hervorgebracht; aber in andern Fällen wird der Nutzeffect zuweilen auch blos durch den Ueberschuss der Wirkung über die Rückwirkung hervorgebracht, und wir wollen daher nun einen solchen Fall an einer Locomotive betrachten.

§. **232.** Lehrsatz. Bei einer Locomotive, welche sich dadurch fortbewegt, dass die Räder, worauf sie ruhet, umgedrehet werden, aber nicht auf den Bahnschienen gleiten, ist die zum Fortbewegen erforderliche Kraft

dieselbe, als wenn der Mittelpunkt des Rades fest wäre und der Widerstand der Bewegung an dem Umfange des Rades wirkte.

Es seien C, D (Fig. 165.) die Achsenenden der vordern und hintern Räder einer Locomotive, welche in den Punkten A, B auf den Bahnschienen ruhen, und es wirke eine Kraft vermittelst der Stange GF auf die Kurbel CF, welche sich mit dem Rade CA um die Achse C drehet; so übt diese Stange eine gewisse Wirkung in F auf die Kurbel aus, uud eine gleiche Reaction wird in G ausgeübt. Wenn CA und DB von FG resp. in H und E getroffen werden, so kann man sich die Wirkung auf das Rad CA als in H und die Reaction als in E stattfindend vorstellen. Man ziehe CE, und dann HK parallel zu CE, und drücke die nach den Richtungen GF oder EH erfolgende Wirkung und Rückwirkung durch EH und HE aus; so ist die Kraft EH von gleicher Wirkung mit den Käften KH, CH, wovon die letztere in H aufgehoben wird und die erstere auf das Rad CA wirkt, und die Kraft HE ist gleichbedeutend mit den Kräften KE, CE, wovon die erstere den Druck in B vermindert und die letztere C gegen E zieht. Es wirken also auf das Rad CA zwei Kräfte KH, CE, welche dasselbe um A zu drehen streben, und der nach der Richtung CD der Bewegung entgegenwirkende Widerstand kann als eine in C senkrecht auf CA wirkende Kraft betrachtet werden. Es sei R diese Kraft, und ANM senkrecht auf CE, HK, so müssen die Kraft und der Widerstand einander das Gleichgewicht halten, und nach der Eigenschaft des Hebels ist, wenn die Kraft KH oder CE durch S bezeichnet wird:

$$R \times CA + S \times AN = S \times AM, \text{ oder } R \times CA = S \times MN.$$

Es sei CO senkrecht von C auf EH und HI auf CE gezogen und P sei der von der Stange GF ausgeübte Druck; so ist:

$$P : S = EH : EC = HI : CO = MN : CO,$$

folglich:
$$P \times CO = S \times MN,$$

und:
$$R \times CA = P \times CO.$$

Die Wirkung ist also dieselbe, als wenn C befestigt wäre, und die Kraft P vermittelst der Stange GF und der Kurbel CF das Rad nach entgegengesetzter Richtung von der zu drehen strebt, nach welcher die an dem Umfange wirkende Kraft R das Rad zu drehen strebt.

Soll die Maschine in der Richtung CD fortbewegt werden, so muss die vermittelst der Stange GF wirkende Kraft eine schiebende sein, so lange die Linie GF unter C liegt und eine ziehende, so lange diese Linie über C liegt. Wenn G mit dem Kolben einer Dampfmaschine verbunden ist, so müssen die beiden Theile der Bewegung resp.

dem auf- und niedersteigenden, oder dem rück- und vorwärtsgehenden Kolbenlaufe entsprechen.

Dieselbe Betrachtung, welche hier auf die Locomotive angewandt ist, ist auch auf jede andere Art von Locomotiven anwendbar.

§. 233. Lehrsatz. Wenn sich eine Locomotive gleichförmig bewegt, so ist das Product aus dem Drucke des Dampfes auf den Kolben und der Länge des doppelten Kolbenlaufes gleich dem Producte aus dem Widerstande der Bewegung und dem Umfange der Treibräder.

Es sei R der Widerstand der Bewegung, Q der mittlere Druck des Dampfes auf den Kolben, l die Länge des Kolbenlaufes und D der Durchmesser der Treibräder; so macht das Rad eine ganze Umdrehung, und ein Punkt seines Umfanges bewegt sich durch die Länge πD, während sich der Kolben hin und zurück bewegt, oder den Weg $2l$ beschreibt; und da die Kraft Q und der Widerstand R einander das Gleichgewicht halten (§. 231.); so ist:

$$R \times \pi D = Q \times 2l.$$

Zusatz 1. Wir haben hier durch Q den wirksamen Druck des Dampfes gegen den Kolben bezeichnet; aber wenn Q den ganzen und A den atmosphärischen Druck bezeichnet, so ist der wirksame Druck $= Q - A$; folglich:

$$R \times \pi D = (Q - A)\, 2l.$$

Zusatz 2. Wir haben vorhin blos einen Kolben betrachtet; aber wenn Q den mittlern Druck auf beide Kolben bezeichnet, so bleibt die vorhergehende Gleichung noch richtig, und folglich wird die Leistung oder der Effect bei einer Locomotive ebenso bestimmt, als bei jeder andern Maschine.

§. 234. Da unter allen Umständen das Product aus der Druckkraft und dem beschriebenen Raume, wenn sie vermittelst einer Maschine wirkt, dem Producte aus dem direct oder unmittelbar ausgeübten Drucke und dem beschriebenen Raume gleich ist; so kann dieses Product als ein Maß der Leistung oder des Effectes angesehen werden, und wir wollen nun dieses Maß auf einige der wichtigsten Fälle anwenden.

§. 235. Am meisten wird das Gewicht fester oder flüssiger Körper, die Elasticität fester Körper, der Stoß tropfbar- oder elastischflüssiger Körper, wie Wasser und Wind, die Expansivkraft elastisch- oder expansivflüssiger Körper, z. B. des Dampfes, und die Muskelkraft der Menschen und Thiere als bewegende Kraft angewandt. Das Brenn-

material ist nur mittelbar eine Kraftquelle, weil es zur Verwandlung von Wasser in Dampf angewandt werden kann.

Bei einigen dieser mechanischen Agentien kann die Wirkung während einer beliebigen Zeit fortdauern, wie bei dem Gewichte und der Elasticität, während bei andern die Wirkung nur eine bestimmte Zeit dauert, wie bei den Kräften der Menschen und Thiere. Im ersten Falle lässt sich daher die ganze Leistung der Kraft nach den vorhergehenden Prinzipien bestimmen, und im letzten Falle bestimmen wir die Leistung der Kraft für eine gegebene Zeit, z. B. die eines Menschen für eine Minute.

1. Gewichts- oder Schwerkraft.

§. **236.** Diese wird in sehr vielen Fällen als bewegende Kraft angewandt, z. B. bei den Uhren, wo sie sowohl das Pendel, als die Gewichte bewegt, bei Hammerwerken, wo die Schwerkraft zuweilen noch mit andern Kräften verbunden wird, bei der Ramme, wo sie allein die wirkende Kraft ist, u. s. f.

Wenn das Gewicht von Körpern als bewegende Kraft angewandt wird, so wird der Totaleffect durch das Product aus dem angewandten Gewichte und dem Raume, durch welchen es sich bewegt hat, ausgedrückt. Wenn z. B. ein Gewicht von **1000** Pfd. um **10** Fuß herabsinkt, so ist der Totaleffect $=$**10000**, und dieses Gewicht mag vermittelst einer Maschinerie **10000** Pfd. um **1** Fuß, oder **1** Pfd. um **10000** Fuß heben, so ist der Totaleffect immer derselbe, wenn die Reibung der Maschinerie unberücksichtigt bleibt. Auch bleibt der Totaleffect ganz derselbe, das bewegende Gewicht mag mit einem Male oder theilweise sich herabbewegen, und die ganze Höhe in einem Zuge, oder in mehrern Abtheilungen herabsinken.

§. **237.** Im größten Maßstabe wird das Gewicht der Körper als bewegende Kraft auf den geneigten Rampen der Eisenbahnen angewandt, wo durch das Gewicht der beladenen, die Rampe herabrollenden Wagen leere Wagen diese Rampe hinaufgezogen werden. Aber in diesem Falle ist die Bewegung der hinabrollenden Wagen im Allgemeinen nicht gleichförmig, sondern wird durch die Schwerkraft beschleunigt, und die Gleichheit zwischen der Kraft und dem Widerstande, welche für die gleichförmige Wirkung der Maschinen hinreichend ist, findet in diesem Falle nicht statt, indem ein Theil des Totaleffectes zur Erzeugung und Vergrößerung der Geschwindigkeit angewandt wird. Wenn z. B. die Höhe der Rampe **100** Fuß und die Länge derselben **4000** Fuß beträgt, jeder der beladenen Wagen **3** Tonnen und jeder leere Wagen **1** Tonne schwer ist, und die Reibung in jedem Falle $\frac{1}{100}$ des

Gewichtes beträgt; so ist der Totaleffect der dem Unterschiede der ab- und aufwärts bewegten Gewichte entsprechende, d. h. für jeden Wagen $= 2$ Tonnen, die um **100** Fuß herabgesunken sind, oder in Pfunden $= 2 \times 20 \times 112 \times 100 = 448000$ Pfd.

Die geleistete Aebeit besteht aus der Reibung und dem überwundenen Widerstande auf die Länge von **4000** Fuß; denn das aufwärts bewegte Gewicht ist bereits in Betracht gezogen. Die Reibung der abwärts bewegten Wagen beträgt $\frac{3 \times 20 \times 112}{200}$ Pfd. und die der aufsteigenden $\frac{20 \times 112}{200}$ Pfd. und die Summe beider ist $= 44{,}8$ Pfd., welche mit **4000** multiplicirt die geleistete Arbeit $= 199200$ Pfd. gibt. Der Totaleffect ist also um mehr als die Hälfte größer, als die wirkliche Leistung, und dieser Ueberschuss wird zur Erzeugung und Beschleunigung der Bewegung verwandt. Da die Reibung **44,8** Pfd. und der Ueberschuss des abwärts bewegten Gewichtes **4480** Pfd. beträgt, so hielten diese beiden Kräfte einander das Gleichgewicht, wenn die Steigung der Rampe **1** Fuß für jede **100** Fuß Länge derselben betrüge, und wenn die Steigung noch geringer wäre, so würde gar keine Bewegung stattfinden.

§. **238.** Wenn ein Gewicht ganz oder zum Theil zur Erzeugung von Geschwindigkeit angewandt wird, so kann seine Leistung in dieser Beziehung durch das Product aus dem bewegten Gewichte und der der erzeugten Geschwindigkeit entsprechenden Fallhöhe ausgedrückt werden.

Lehrsatz. Die Leistung einer Maschine, woran Gewichte wirken, ist dem Totaleffecte gleich, wenn bei der Bestimmung der Leistung die erzeugte Geschwindigkeit der Gewichte in Betracht gezogen wird.

Denn wenn ein Körper m durch eine Höhe h herabfällt, so ist die Leistung, deren er während des Herabfallens fähig ist, $= m h$; aber wenn während des Herabfallens keine Arbeit verrichtet wird, so wird die ganze Gewichtskraft zur Erzeugung von Geschwindigkeit verwandt, und in diesem Falle ist, wenn v die Geschwindigkeit bezeichnet, $v^2 = 2 g h$. Folglich ist der Effect, welcher während des Herabfallens des Gewichtes hätte hervorgebracht werden können, $= \frac{m v^2}{2g}$, weil $h = \frac{v^2}{2g}$ ist.

Wenn während eines Theiles des Herabbewegens ein Theil des Gewichtes zur Verrichtung einer Arbeit, z. B. zur Ueberwindung der

Reibung oder eines Widerstandes verwandt ist, und h′ die Höhe bezeichnet, um welche m sich herabbewegt hat, wenn ein Theil m′ des Gewichtes zur Ueberwindung des Widerstandes angewandt wird, so ist die verticale beschleunigende Kraft von m nach diesem Zeitpunkte $= \frac{m - m'}{m} g$ statt g, und wenn v′ die Geschwindigkeit bezeichnet, welche m erlangt hat, wenn es durch die Höhe h′ herabgefallen ist, und u die der Fallhöhe h entsprechende Geschwindigkeit; so ist:

$$u^2 = v'^2 + 2\frac{m - m'}{m} g(h - h'), \text{ (§. 163. Zus. 3.),}$$

oder weil $v'^2 = 2gh'$ ist:

$$u^2 = 2g\left[h - \frac{m'}{m}(h - h')\right],$$

woraus folgt: $$\frac{mu^2}{2g} + m'(h - h') = mh.$$

Es sei k die Höhe, durch welche ein Körper fallen muss, um die Geschwindigkeit u zu erlangen, so ist $u^2 = 2gk$, und die obige Gleichung verwandelt sich in:

$$mk + m'(h - h') = mh,$$

d. h. die verrichtete Arbeit ist dem Totaleffecte der Maschine gleich, wenn die erzeugte Geschwindigkeit nach der oben angegebenen Art in Rechnung gebracht wird; denn mk ist die während der Erzeugung dieser Geschwindigkeit und m′(h — h′) die bei der Ueberwindung der Widerstände verrichtete Arbeit.

§. 242. Der obige Satz findet noch statt, wenn der zur Ueberwindung der Widerstände erforderliche Theil m′ des Gewichtes sich während der Bewegung ändert. Denn wenn h — h′ sehr klein ist, so kann diese Größe als ein Element der verticalen Höhe betrachtet werden, und wenn m′ während dieses Elementes constant ist, so findet der Satz für dieses Element statt, sowie für jedes der folgenden Elemente bis zu dem Ende der Bewegung.

Dieser Satz gilt auch für eine beliebige Anzahl von Körpern und Widerständen; d. h. wenn $m_1, m_2, m_3, \ldots$ die Gewichte, $h_1, h_2, h_3, \ldots$ die Räume, durch welche sie herabfallen können, $k_1, k_2, k_3, \ldots$ die den von $m_1, m_2, m_3, \ldots$ erlangten Geschwindigkeiten entsprechenden Fallhöhen, $m', m'', \ldots$ die zur Ueberwindung der Widerstände erforderlichen Gewichte und $k', k'', \ldots$ die Räume, während deren Beschreiben diese Gewichte wirken mussten, bezeichnen; so ist nach dem vorhergehenden §:

$$m_1 k_1 + m_2 k_2 + m_3 k_3 + m' k' + m'' k'' + \ldots = m_1 h_1 + m_2 h_2 + m_3 h_3 + \ldots$$

Wenn $u_1, u_2, u_3, \ldots$ die wirklich von $m_1, m_2, m_3, \ldots$ erlangten Geschwindigkeiten und $v_1, v_2, v_3, \ldots$ die Geschwindigkeiten, welche sie beim freien Falle durch $h_1, h_2, h_3, \ldots$ erlangt haben würden, und endlich $u', u'', \ldots$ die Geschwindigkeiten bezeichnen, welche Körper bei dem freien Falle durch $k', k'', \ldots$ erlangen; so ist $u_1^2 = 2gk_1$, etc.; folglich:

$$m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 + m_3 u_3^2 + m' u'^2 + m'' u''^2 + \ldots = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_3 v_3^2 + \ldots$$

Erklärung. Die Summe, welche man erhält, wenn man jeden Körper des Systemes mit dem Quadrate seiner Geschwindigkeit multiplicirt und alle Producte zusamenaddirt, wird die **lebendige Kraft** des Systemes genannt.

Aus dem Vorhergehenden erhellet, dass die lebendige Kraft eines Systemes, worauf blos die Schwere wirkt, der gleich ist, welche es gehabt haben würde, wenn seine Theile frei herabgefallen wären, und man noch die den überwundenen Widerständen entsprechende lebendige Kraft hinzugefügt hätte. Es ist jedoch oft sehr schwer, diesen Satz anzuwenden; denn es gibt viele Fälle, wo uns zur Bestimmung der überwundenen Widerstände die Mittel fehlen. So ist es z. B. sehr schwer, bei dem Zusammenstoßen von Körpern zu bestimmen, wie viel von der lebendigen Kraft verloren geht.

2. Kraft des Wassers.

§. **243.** Wenn das Wasser als bewegende Kraft angewandt wird, und vermittelst seines Gewichts wirkt, wie bei den Wasserrädern, so lässt sich der Totaleffect und der Nutzeffect nach denselben Regeln, wie bei festen Körpern, bestimmen. Der Totaleffect ist nämlich das Product aus dem Gewichte des angewandten Wassers und der Höhe, durch welche wir es herabfallen lassen können.

Wenn das Wasser durch seinen Druck oder Stoß wirkt, wie bei unterschlächtigen Wasserrädern, so wird der Totaleffect dadurch bestimmt, dass man die seiner Geschwindigkeit entsprechende Fallhöhe als den Raum betrachtet, durch welchen das Gewicht des Wassers wirkt, und diese Bestimmungsart ist anwendbar, wenn die ganze Geschwindigkeit des Wassers zur Hervorbringung eines Nutzeffectes angewandt werden kann; denn wenn die Richtung der Geschwindigkeit jedes Wassertheilchens vertical gemacht würde, so würde es seine ganze Geschwindigkeit verlie-

ren, indem es zu der dieser Geschwindigkeit entsprechenden Höhe aufstiege, und wenn jedes Wassertheilchen zu der seiner Geschwindigkeit entsprechenden Höhe aufgestiegen wäre, so könnten wir uns das ganze Wasser als ruhend und dann durch diese Höhe herabfallend vorstellen, so dass der Totaleffect durch das Product aus dem Gewichte des Wassers und dem durchfallenen Raume ausgedrückt würde. Aber bei der Wirkung des in Bewegung befindlichen Wassers ist der Totaleffect weit geringer als dieses Product, weil ein beträchtlicher Theil der Kraft durch die gegenseitige Einwirkung der Flüssigkeitstheilchen auf einander absorbirt wird.

Nach dem eben Gesagten wird also der Totaleffect eines Wasserrades durch das Product aus dem Gewichte des angewandten Wassers und der Wasserhöhe ausgedrückt, wo unter der Wasserhöhe (dem Wasserfalle) entweder die wirkliche Höhe, durch welche das Wasser herabfällt, oder die seiner Geschwindigkeit entsprechende hypothetische Fallhöhe zu verstehen ist. In allen Fällen ist aber der wirkliche oder Nutzeffect kleiner, als der Totaleffect, weil wegen der innern Bewegungen der Flüssigkeit und anderer Ursachen ein Theil der Kraft verloren geht.

Wenn ein Wasserrad, oder eine andere Wassermaschine zum Heben eines Gewichtes angewandt wird, so folgt aus dem Vorhergehenden, dass das Product aus dem verbrauchten Wasser und der Wasserhöhe dem Producte aus dem gehobenen Gewichte und der Höhe, um welche es gehoben wird, gleich wäre, wenn die ganze Kraft wirksam wäre.

Unter übrigens gleichen Umständen verhält sich die verbrauchte Quantität Wasser wie die Geschwindigkeit desselben, und die Wasserhöhe wie das Quadrat der Geschwindigkeit, und folglich muss sich der Effect wie die dritte Potenz der Geschwindigkeit verhalten, was mit den Resultaten der von Smeaton an Modellen angestellten Versuche übereinstimmt. Aus diesen Versuchen folgt, dass sich bei einem oberschlächtigen Wasserrade der Totaleffect zu dem wirklich hervorgebrachten oder Nutzeffecte ungefähr wie **5** zu **4** verhält, indem blos das aufgehobene Gewicht als Nutzeffect betrachtet und die Reibung etc. unberücksichtigt gelassen wird. Smeaton fand auch, dass sich bei unterschlächtigen Wasserrädern die angewandte Kraft zu dem auf dieselbe Weise bestimmten Nutzeffecte ungefähr wie **10** zu **3** verhält, und man behauptet, dass bei dem hydraulischen Widder der Nutzeffect sich dem Totaleffecte am meisten nähern soll.

3. Kraft der Luft oder des Windes.

§. **244.** Auch die Luft wird als bewegende Kraft angewandt, indem man entweder ihre Elasticität oder ihre Bewegung benutzt, und

es beruht z. B. die Wirkung der Windbüchse auf der plötzlichen Ausdehnung der Luft. Durch die Temperaturveränderungen und andere Ursachen wird das Gleichgewicht der Luft gestört, und es entstehen Strömungen in derselben, welche als bewegende Kräfte benutzt werden, wie z. B. bei den Windmühlen und Schiffen. Der Totaleffect des Windes als bewegende Kraft kann ebenso wie der des Wasserdampfes berechnet werden, und ist dem Producte aus einem der Elasticität der Luft gleichem Gewichte und der ihrer Geschwindigkeit entsprechenden Fallhöhe gleich. Smeaton hat durch Versuche dargethan, dass sich bei den Windmühlen der Effect des Windes wie die dritte Potenz seiner Geschwindigkeit verhält, was mit dem Obigen übereinstimmt.

4. Elasticität der Körper.

§. **245.** Elastische Körper, wie Federn, werden ebenfalls zur Hervorbringung stetiger Bewegungen, wie z. B. in den Uhren, selbstspielenden musikalischen Instrumenten und andere Automaten, sowie auch zur Hervorbringung plötzlicher und intensiver Wirkungen, wie bei den Bogen und Fallen, angewandt.

Die Wirkung einer Feder, während sie sich von einer gezwungenen Lage durch einen kleinen Raum ausdehnt oder zusammenzieht, wird durch das Product aus dem auf irgend einen Punkt ausgeübten Drucke und dem Raume, durch welchen sich der Punkt bewegt, ausgedrückt. Der Druck, welchen die Feder während ihrer Bewegung ausübt, ist im Allgemeinen veränderlich, und die ganze Wirkung derselben ist alsdann die Summe, welche man erhält, wenn man jedes Element des beschriebenen Raumes mit dem während des entsprechenden Elementes der Bewegung ausgeübten Drucke multiplicirt, und alle Producte zusammenaddirt.

5. Kraft des Dampfes.

§. **246.** Der Dampf wirkt vermittelst seiner Elasticität oder Spannkraft, und seiner Fähigkeit, durch Hitze und Kälte erzeugt und condensirt werden zu können.

Die Wirkung des Dampfes wird auf dieselbe Weise wie die jedes andern elastischen Körpers gemessen; aber da der Dampf mehrere besondere Eigenschaften besitzt, so ist eine besondere Betrachtung erforderlich.

Der Dampf wird auf verschiedene Weisen als bewegende Kraft angewandt, wovon wir die hauptsächlichsten hier anführen wollen, indem wir 1) die atmosphärischen Maschinen betrachten, worin der atmosphärische Druck durch die Condensation des Dampfes benutzt wird;

2) die Condensationsmaschinen, worin der Kolben nach beiden Richtungen durch den Dampf fortgetrieben wird, während er auf der andern Seite des Kolbens condensirt wird und einen größern Druck als der atmosphärische hat, und 3) die Hochdruckmaschinen, worin der Dampf ebenfalls eine größere Spannkraft als der atmosphärische Druck hat, weil letzterer der Bewegung des Kolbens entgegenwirkt und keine Condensation stattfindet.

1. Atmosphärische Maschinen.

In den atmosphärischen Maschinen wird der Kolben in einem verticalen Cylinder, in dessen unteres Ende der Dampf tritt, dessen Spannkraft dem atmosphärischen Drucke gleich ist, aufwärts bewegt, indem der Kolben ein kleines Uebergewicht hat, worauf der Dampf unter dem Kolben condensirt und letzterer durch den ganzen Druck der Atmosphäre wieder niederwärts bewegt wird, und dasselbe wiederholt sich. In diesem Falle wird nur bei dem Niedersteigen des Kolbens ein Effect hervorgebracht, und beim Aufsteigen desselben nicht; aber letzteres ist zur Fortdauer der auf- und niedergehenden Bewegung erforderlich.

§. 244. Aufgabe. Den 1 Cubikfuß verdampften Wassers entsprechenden Totaleffect einer atmosphärischen Maschine zu finden.

Der von dem Dampfe bei der Temperatur des siedenden Wassers und folglich von der Spannkraft, welche dem atmosphärischen Drucke gleich ist, eingenommene Raum ist **1711** mal größer, als das Volumen des Wassers, woraus er sich gebildet hat. Es gibt also **1** Cubikfuß Wasser **1711** Cubikfuß Dampf, dessen Spannkraft dem atmosphärischen Drucke gleich ist, welcher im Mittel für den Quadratfuß **2120** Pfd. beträgt. Folglich beträgt der ganze Druck $1711 \times 2120 = 3627320$ Pfd., wenn der Raum, welchen der Dampf einnimmt, eine Höhe von **1** Fuß und eine horizontale Basis von **1711** Quadratfuß hat, und wenn der Dampf condensirt wird; so wirkt dieser ganze Druck durch den Raum von **1** Fuß, so dass also der Totaleffect **3627320** Pfd. beträgt.

Wenn der Dampf einen prismatischen Raum von h Fuß Höhe einnimmt, und die horizontale Grundfläche dieses Raumes $\frac{1711}{h}$ Quadratfuß beträgt, so ist der Druck auf den Kolben $= \frac{1711}{h} \times 2120$ Pfd. und wenn der Dampf condensirt wird, so bewegt sich der Kolben

durch einen Raum von h Fuß; folglich ist der Totaleffect der Maschine $= 1711 \times 2120$.

Wenn der Kolben durch einen kleinen Drucküberschuss p über den atmosphärischen Druck q aufwärts bewegt wird, und h die Länge des Kolbenlaufes bezeichnet, so wird bei dem Aufsteigen des Kolbens ein Effect $= ph$ und bei dem Niedersteigen desselben ein Effect $= (q - p)h$ hervorgebracht; folglich ist der Totaleffect während des doppelten Kolbenlaufes $= qh$, also derselbe, als wenn kein Drucküberschuss stattfände.

Wenn $p = \frac{1}{2}q$ ist, so ist der Effect während des Aufsteigens des Kolbens dem während seines Niedersteigens gleich, und zwar jeder gleich $\frac{1}{2}qh$, welche Einrichtung oft bei atmosphärischen Maschinen angewandt wird.

§. 245. Aufgabe. Den 1 Pfd. Kohlen entsprechenden Totaleffect einer atmosphärischen Maschine zu finden.

Nach Tredgold ist zur Verdampfung von 1 Cubikfuß Wasser bei dem atmosphärischen Drucke eine Quantität von 7 bis 10 Pfd. newcastler Kohlen erforderlich und nach Watt's Beobachtungen können 84 Pfd. Kohlen 10 Cubikfuß Wasser in Dampf verwandeln, während nach Davies Gilbert durch dieselbe Quantität Kohlen 14 Cubikfuß Wasser verdampft werden können.

Wenn wir Watt's Angabe annehmen, so sind zur Verdampfung von 1 Cubikfuß Wasser 8,4 Pfd. Kohlen erforderlich, und wenn wir folglich den 1 Cubikfuß verdampften Wassers entsprechenden Effect durch 8,4 dividiren, so erhalten wir den 1 Pfd. Kohlen entsprechenden Effect $= 431824$. Oder da durch 84 Pfd. Kohlen 10 Cubikfuß Wasser in Dampf verwandelt werden, so ist nach dem letzten §. bei einer atmosphärischen Maschine der 84 Pfd. Kohlen entsprechende Effect $= 36273200$, und wenn man diese Zahl durch 84 dividirt, so erhält man den 1 Pfd. Kohlen entsprechenden Effect.

Gilbert gibt den Effect einer atmosphärischen Maschine für 84 Pfd. Kohlen $= 39361000$ an, wovon aber der $\frac{1}{8}$ des Totaleffectes betragende Effect des Luftauspumpens und der von dem unvollkommenen leeren Raume, so wie von der Reibung herrührende Widerstand abgezogen werden muss.

2. Condensationsmaschinen.

§. 246. In diesen Maschinen wird die Bewegung des Kolbens dadurch hervorgebracht, dass der Dampf abwechselnd auf die eine und dann auf die andere Kolbenfläche wirkt und auf der entgegengesetzten

Seite condensirt wird, und die Spannkraft des Dampfes ist gewöhnlich größer, als der atmosphärische Druck. Der Effect solcher Maschinen wird hier besonders durch zwei Umstände vergrößert, nämlich 1) durch Erhöhung der Temperatur des Dampfes über die des siedenden Wassers, wodurch die Spannkraft desselben größer gemacht wird als der atmosphärische Druck, aber auch eine größere Quantität Brennmaterial consumirt wird, und 2) durch die Expansion des Dampfes, d. h. der Zutritt des Dampfes in den Cylinder wird unterbrochen, wenn der Kolben bereits einen großen Theil seines Weges zurückgelegt hat, und er durchläuft den noch übrigen Theil vermöge der Expansivkraft des bereits in dem Cylinder befindlichen Dampfes.

Durch diese und andere Verbesserungen der Condensationsmaschinen wird der einem Scheffel oder 84 Pfd. Kohlen entsprechende Effect weit größer gemacht, als der vorhin für die atmosphärischen Maschinen berechnete. Denn im Jahre 1829 betrug der wirkliche Effect einer Cornwallschen Condensationsmaschine mit einem Cylinder von 80 Zoll im Durchmesser 75628000 und mehrere andere gaben fast denselben Effect. Wir können daher den einem Scheffel oder 84 Pfd. Kohlen entsprechenden Effect bei einer Condensationsmaschine größer, als 70000000 und folglich den einem Pfunde Kohlen entsprechenden wirklichen Effect = 840000 annehmen.

3. Hochdruckmaschinen.

§. 247. Bei diesen Maschinen wird der Kolben in dem Cylinder durch Dampf fortbewegt, welcher eine größere Spannkraft als der atmosphärische Druck hat, indem er an dem einen Ende in den Cylinder tritt, welcher an dem andern, von Dampf leeren Ende eine in die Atmosphäre mündende Oeffnung hat, gegen welche sich der Kolben zu bewegt. Hierauf verschließt sich diese Oeffnung, der Dampf tritt an diesem Ende in den Cylinder und die Mündung am andern Ende des Cylinders öffnet sich, gegen welche zu sich jetzt der Kolben bewegt, u. s. f.

Aufgabe. Den Totaleffect einer Hochdruckmaschine zu finden.

Um den Totaleffect einer Hochdruckmaschine bestimmen zu können, welcher einer gegebenen Quantität Kohlen entspricht, muss man die Quantität Dampf von der in der Maschine angewandten Spannkraft kennen, welche durch diese Quantität Kohlen erzeugt werden kann. Aber bei den Hochdruckmaschinen geht ein Theil der Spannkraft des Dampfes bei seinem Uebergange aus dem Kessel in den Cylinder wegen des durch die Ventile entweichenden Dampfes verloren. Kennt man die Spannkraft des Dampfes in dem Cylinder, so lässt sich der Totaleffect wie in dem folgenden Beispiele bestimmen.

In einer Locomotive seien die beiden Kolbenflächen = **127,2** Quadratzoll, die Spannkraft des Dampfes im Kessel = **50** Pfd. für den Quadratzoll über den atmosphärischen Druck, die Länge des Kolbenlaufes = **2** Fuß und der Durchmesser der Treibräder = **37** Zoll, den Totaleffect für eine Länge von **388** Yards zu bestimmen.

Der Druck auf die Kolben beträgt **6360** Pfd. und der von dem Kolben während eines doppelten Kolbenlaufes beschriebene Raum **4** Fuß, so dass der während eines doppelten Kolbenlaufes hervorgebrachte Effect = **6360 × 4** ist.

Da der Durchmesser der Räder **37** Zoll beträgt, so ist der Umfang derselben = **116,24** Zoll und die Länge des ganzen beschriebenen Weges = **3 × 388 × 12** Zoll; mithin die Anzahl dieser Umdrehungen für den ganzen Weg $= \frac{3 \times 388 \times 12}{116{,}24} = 120.$

Da aber jeder Radumdrehung ein doppelter Kolbenlauf entspricht, so ist der Totaleffect, wenn angenommen wird, dass der Dampf in dem Cylinder dieselbe Spannkraft hat, wie im Kessel, = **6360 × 4 × 120** = **3052800.**

Aus dem Versuche, worauf sich diese Berechnung bezieht, folgt, dass der Gesammtwiderstand = **1829** Pfd. betrug, welcher durch eine Länge von **3 × 388** Fuß bewegt wurde, und folglich war der entsprechende Effect = **1829 × 3 × 388** = **2128956.**

Der Ueberschuss des Totaleffectes über den wirklichen Nutzeffect rührt zum Theil von den nicht in Betracht gezogenen Widerständen und zum Theil davon her, dass die Spannkraft des Dampfes im Kessel von dem im Cylinder verschieden war.

Man hat durch Beobachtung gefunden, dass bei Maschinen dieser Art zur Verdampfung von **1** Cubikfuß Wasser **18** bis **21** Pfd. Kohlen erforderlich sind.

§. **248.** Wir wollen noch folgendes Rechnungsbeispiel anführen: In einer kleinen Hochdruckmaschine haben die Cylinder **8** Zoll im Durchmesser, der Kolbenlauf ist = $4\frac{1}{2}$ Fuß, und sie setzt eine Pumpe in Bewegung, welche einen Durchmesser von $18\frac{1}{2}$ Zoll, einen Kolbenlauf von $4\frac{1}{2}$ Fuß hat und das Wasser auf eine Höhe von **28** Fuß hebt. Die Maschine consumirt **80** Pfd. Kohlen in der Stunde und es finden **18** Kolbenläufe in der Minute statt. Wie groß ist ihr Effect?

Der Querschnitt der Wassersäule ist = **18,5 × 18,5 × 7854** = **268,8** Quadratzoll, und der Druck einer Wassersäule von **1** Fuß Höhe und **1** Quadratzoll Grundfläche ist = **0,434**; mithin ist das Gewicht der ganzen Wassersäule = **268,8 × 0,434 × 28** = **3266,5** Pfd. Der Kolben bewegt sich in der Minute durch einen Raum von $4\frac{1}{2} \times 18$ =

81 Fuß, oder in der Stunde durch einen Raum von 4860 Fuß, und wenn man diese Zahl mit 3266,5 multiplicirt, so erhält man den stündlichen Effect = 15875190.

Dividirt man also diese Zahl durch 80, so ergibt sich der 1 Pfd. Kohlen entsprechende Nutzeffect = 198439,5.

Da in diesem Falle der Kolbenzug der Pumpe und der Dampfmaschine einander gleich sind, so muss der Druck in beiden gleich sein, damit sie einander das Gleichgewicht halten. Folglich ist der Druck auf den Kolben = 3266,5 Pfd., und da die Kolbenfläche = $8 \times 8 \times 0{,}7854$ = $50\frac{1}{4}$ Quadratzoll ist; so beträgt der wirksame Druck für den Quadratzoll 65 Pfd., welches der Ueberschuss der Spannkraft des Dampfes über den atmosphärischen Druck ist.

Bei den sich gleichförmig bewegenden Locomotiven wird der Druck des Dampfes zur Erhaltung der Geschwindigkeit angewandt, und da der Widerstand unabhängig ist von der Geschwindigkeit, so ist auch der Druck auf den Kolben unabhängig von der Geschwindigkeit. Wenn sich also dieselbe Maschine mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegt, so ist die Spannkraft des Dampfes in dem Cylinder fast dieselbe und nur die Geschwindigkeit der Dampferzeugung ist verschieden.

§. 249. Aufgabe. Den einer gegebenen Quantität Kohlen entsprechenden Effect einer Locomotive mit dem Effecte einer atmosphärischen Maschine zu vergleichen.

Bei den besten neuern Locomotiven wird zur Fortbewegung von 1 Tonne auf 1 Meile $\frac{1}{2}$ Pfd. Kohlen erfordert. Wenn die Reibung = $\frac{1}{240}$ des Gewichtes angenommen wird, so beträgt sie für die Tonne $9\frac{1}{4}$ Pfd., und folglich ist der während einer Meile hervorgebrachte Effect für $\frac{1}{2}$ Pfd. Kohlen = $9\frac{1}{4} \times 5280 = 48840$ und für ein ganzes Pfund Kohlen = 97680, wogegen bei einer atmosphärischen Maschine der Effect für 1 Pfd. Kohlen, wie wir gesehen haben, = 431824, also $4\frac{1}{2}$ mal größer ist.

Die Erfahrung lehrt, dass die Quantität des consumirten Brennmaterials fast dem hervorgebrachten Nutzeffecte der Locomotiven proportional ist, und die Geschwindigkeit der Maschine ist von dem Grade der Schnelligkeit abhängig, mit welcher das Wasser in Dampf von einer gegebenen Spannkraft verwandelt wird.

Die Geschwindigkeit der Maschine nimmt also mit der Größe der Heitzfläche des Kessels und mit dem Luftzuge in der Esse zu, und ein sehr wirksames Mittel zur Erlangung eines starken Luftzuges besteht darin, dass man den bereits als bewegende Kraft benutzten Dampf aus dem Cylinder in den Schornstein strömen lässt.

§. 250. In praktischem Sinne wird die Geschwindigkeit einer Locomotive durch die Quantität des in einer gegebenen Zeit in Dampf verwandelten Wassers bestimmt, wie bereits bemerkt worden, und wir wollen daher blos noch folgende Aufgabe hinzufügen.

Aufgabe. Wenn die Verdampfungskraft und die Spannkraft des Dampfes im Kessel gegeben ist, die Geschwindigkeit der sich gleichförmig bewegenden Locomotive zu finden.

Es sei der ganze von der Reibung der Räder auf den Bahnschienen und der übrigen beweglichen Maschinentheile herrührende Widerstand der Bewegung $=R$, D der Durchmesser der Treibräder, C der Durchmesser der Cylinder, l die Länge des Kolbenlaufes, m der atmosphärische Druck für den Quadratzoll und q der Druck des Dampfes im Cylinder für den Quadratzoll; so ist, da beide Kolbenflächen $=\frac{1}{2}\pi C^2$ sind, $(q-m)\frac{1}{2}\pi C^2$ der wirksame Druck auf den Kolben, und nach Kapitel 3. Abschnitt 3. ist folglich:

$$R \times \pi D = (q-m)\tfrac{1}{2}\pi C^2 \times 2l;$$

also:
$$q = \frac{DR}{C^2 l} + m.$$

Es sei p der Druck des Dampfes im Kessel auf den Quadratzoll, s die Verdampfungskraft, d. h. die Anzahl von Cubikfußen Wasser, welche der Kessel in der Minute in Dampf von der Spannkraft p verwandeln kann und n sei das Verhältniss des Volumens des Dampfes von der Spannkraft p zu dem Volumen des Wassers, woraus er sich gebildet hat; so ist ns das Volumen des in der Minute im Kessel gebildeten Dampfes. Da ferner q den Druck des Dampfes im Cylinder bezeichnet, so geht dieser Druck bei dem Uebergange des Dampfes aus dem Kessel in den Cylinder von der Größe p zu der Größe q über und das Volumen des Dampfes ändert sich nach dem mariotteschen Gesetze nach dem umgekehrten Verhältnisse der Druckkräfte, so

dass das Volumen des Dampfes im Cylinder $=\frac{msp}{q}$ ist. Dieses Volumen Dampf geht in der Minute durch den Cylinder, und wenn wir dasselbe durch den innern Querschnitt der Cylinder, oder durch $\frac{1}{2}\pi C^2$ dividiren, so erhalten wir die mittlere Geschwindigkeit des Dampfes und folglich auch die des Kolbens, nämlich:

$$\frac{2nsp}{\pi C^2 q}.$$

Nun verhält sich aber die Geschwindigkeit der Locomotive zu der

des Kolbens wie πD zu $2l$, und folglich ist die Geschwindigkeit der Locomotive:

$$\frac{nspD}{C^2 q l'}$$

und wenn man für q seinen Werth setzt:

$$\frac{nspD}{RD + n^2 C^2 l}.$$

Beispiel. Eine Locomotive, deren Ladung **100** Tonnen beträgt, hat einen Cylinder von **11** Zoll im Durchmesser, einen Kolbenlauf von **16** Zoll, Räder von **5** Fuß im Durchmesser, der wirksame Druck des Dampfes im Kessel beträgt **50** Pfd. für den Quadratzoll, und die wirksame Verdampfung **41,87** Cubikfuß Wasser in der Stunde, oder **0,7** Cubikfuß in der Minute, und man soll die Geschwindigkeit der Maschine finden.

Dieses Wasser wird in dem Kessel unmittelbar in Dampf von dem wirksamen Drucke von **50** Pfd., für den Quadratzoll oder von dem Totaldrucke von **65** Pfd. für den Quadratzoll verwandelt, und nach den aus Versuchen abgeleiteten Tafeln nimmt der unter einem Drucke von **65** Pfd. für den Quadratzoll gebildete Dampf ein **435** mal größeres Volumen ein, als das Wasser, woraus er sich gebildet hat, so dass das in jeder Minute gebildete Volumen Dampf $= 0{,}7 \times 435 = 304$ Cubikfuß ist. Aus den sich auf die in Rede stehende Maschine beziehenden Berechnungen folgt, dass der Widerstand für den Quadratzoll der Kolbenfläche bei einer Ladung von **100** Tonnen **46** Pfd. beträgt. Wenn also der Dampf aus dem Kessel in die Cylinder übergeht, so nimmt seine Spannkraft von **65** bis auf **46** Pfd. ab, und da sein Volumen in demselben Verhältnisse zunimmt, so ist das in jeder Minute durch die Cylinder gehende Dampfvolumen gleich $\frac{304 \times 65}{46} = 430$ Cubikfuß. Da nun der innere Querschnitt der beiden Cylinder **190** Quadratzoll oder **1,32** Quadratfuß beträgt, so hat der obige durch die Cylinder gehende Dampf eine Geschwindigkeit von $\frac{430}{1{,}32} = 326$ Fuß in der Minute, welches folglich auch die mittlere Geschwindigkeit des Kolbens ist.

Die Geschwindigkeit der Maschine selbst verhält sich aber zu der des Kolbens wie der Radumfang zu der Länge des doppelten Kolbenlaufes, d. h. wie **5,887** zu **1**, und folglich ist die Geschwindigkeit der Maschine $= 5{,}887 \times 326$ Fuß in der Minute, oder $5{,}887 \times 326 \times \frac{60}{5280} = 21{,}83$ Meilen in der Stunde.

6. Menschen- und Pferdekraft.

§. **251.** Die Kraft des Menschen wird auf verschiedene Weisen zur Verrichtung von Arbeiten angewandt, und zwar am gewöhnlichsten zum Heben von Gewichten mit den Händen und Beinen.

Wenn ein Mensch eine Treppe oder eine steile Anhöhe hinaufsteigt, so muss er außer dem Gewichte, welches er trägt, auch noch das Gewicht seines eigenen Körpers vermittelst der Beine heben, und ebenso, wenn ein Mensch in einer Tretmühle arbeitet, so muss er das Gewicht seines eigenen Körpers auf jede Stufe heben, sowie das Tretrad sinkt. Die folgenden Versuche bieten eine Schätzung der Leistung eines Menschen dar.

1) Man hat gefunden, dass ein in einer Tretmühle arbeitender Mensch im Verlauf eines Tages das Gewicht seines eigenen Körpers **10000** Fuß hebt, und wenn wir dieses Gewicht zu **150** Pfd. annehmen; so ist die tägliche Leistung dieses Menschen $=$**1500000.**

2) Das Ersteigen eines Berges von **10000** Fuß Höhe ist schon eine gute tägliche Arbeit und gibt dasselbe Resultat.

3) Nach den Versuchen von Coulomb ersteigt ein Mensch mit einer Last von **68** Kilogr. eine bequeme Treppe von **12** Meter Höhe täglich **66** mal, d. h. so viel, als wenn er **448** Kilogramm täglich **12** Meter hoch hebt, und das Gewicht seines eigenen Körpers **792** Meter. Wird also das Gewicht des Menschen selbst auf **70** Kilogramme geschätzt, so ist seine tägliche Leistung oder Arbeit $=448\times12+70\times792=$**109296** Kilogr. auf **1** Meter gehoben, oder da **1** Meter $=$**3,28052** Fuß und **1** Kilogr. $=$**2,2063** Pfd. ist; so ist die tägliche Leistung des Menschen $=$**791139.** Diese Größe ist kleiner als die erste, und es ist daher das Tragen eines Gewichtes von **68** Kilogr. hinsichtlich der Größe der Leistung nicht so vortheilhaft, als wenn die Kraft des Menschen blos zur Hebung des Gewichtes seines eigenen Körpers verwandt wird. Durch das abwechselnde Auf- und Niedersteigen wird die Größe des Effectes oder der Leistung ebenfalls vermindert, weil letzteres nicht in Betracht gezogen wird.

In folgenden Beispielen wird der Effect eines Menschen durch seine Arme hervorgebracht.

4) Bei den Rammen wird die Kraft des Menschen zum Heben des Rammklotzes angewandt, welcher alsdann vermöge seines eigenen Gewichtes herabfällt. **38** Arbeiter ziehen bei einer täglichen Arbeitszeit von **10** Stunden in jeder Stunde einen Rammklotz von **587** Kilogr. Gewicht **360** mal, und zwar jedes mal um **1,45** Meter, in die Höhe; also täglich **3600** mal. Folglich ist der Effect jedes Arbeiters

$= \frac{587}{38} \times 1{,}45 \times 3600 = 80635{,}3$ Kilogr. auf 1 Meter gehoben, und in Pfunden 583,678 Pfd. auf 1 Fuß gehoben.

5) Wenn ein Arbeiter bei der Drehung eines Rades eine Kraft von 7 Kilogrammen ausübt, und in der Minute 20 Umdrehungen macht, indem der von der Kraft beschriebene Umfang 2,3 Meter lang ist, und die Arbeitszeit täglich 6 Stunden beträgt; so macht er täglich 7200 Umdrehungen, und der tägliche Effect ist $= 7 \times 2{,}3 \times 7200 =$ 115,920 Kilogr. auf 1 Meter gehoben, oder $= 839087$ Pfd. auf 1 Fuß gehoben.

6) Desaguliers nimmt an, dass ein Mann ein Gewicht von 550 Pfd. 10 Fuß hoch in der Minute heben und dieses 6 Stunden fortsetzen kann, so dass hiernach der tägliche Effect $= 360 \times 550 \times 10 = 1980000$ ist. Nach dieser Schätzung ist die Leistung eines Mannes für eine Minute $= 5500$, was aber nach andern zu viel sein soll.

7) Smeaton meint, dass ein guter Arbeiter in der Minute 370 Pfd. auf 10 Fuß heben kann, so dass der Effect oder die Leistung für die Minute $= 3700$ ist.

Wenn man bei der Tretmühle die tägliche Arbeitszeit zu 8 Stunden annimmt, so ist die Leistung für die Minute $= 3125$.

§. 252. Nach Desaguliers kann ein Pferd, welches ein Gewicht aus einem Brunnen über eine Rolle zieht, 200 Pfd. mit der Geschwindigkeit von $2\frac{1}{2}$ Meilen in der Stunde während 8 Stunden ziehen, so dass die Leistung $= 200$ Pfd. auf 20 Meilen oder 105600 Fuß gehoben, und folglich die Leistung eines solchen Tagewerkes $=$ 21120000 ist.

Wenn ein Pferd eine Last von 1 Tonne auf einer gewöhnlichen Straße mit der Geschwindigkeit von $2\frac{1}{2}$ Meilen in der Stunde fortzieht, und die Reibung $= \frac{1}{12}$ Tonne oder $= 186$ Pfd. angenommen wird, so ist die Leistung für 1 Minute:

$$\frac{2\frac{1}{2} \times 5280 \times 2240}{60 \times 12} = \frac{220 \times 2240}{12} = \frac{492800}{12} = 41066.$$

Gewöhnlich nehmen die Ingenieure die Kraft oder den Effect eines Pferdes $= 3300$ Pfund auf 1 Fuß in der Minute gehoben an. Smeaton nimmt die Leistung eines Pferdes $= 550$ Pfd. auf 40 Fuß in der Minute gehoben an, so dass das Maß der Kraft oder des Effectes eines Pferdes $= 22000$ ist.

§. 253. Aufgabe. Die Kräfte der Thiere bei verschiedenen Geschwindigkeiten mit einander zu vergleichen.

Die Kraft der Menschen und Thiere wirkt als Druckkraft stärker, wenn sie gegen einen in Ruhe befindlichen Widerstand wirkt, als wenn sich der Widerstand mit ihnen forbewegt, und bei einer gewissen Geschwindigkeit kann der Mensch oder das Thier weiter gar keinen Effect hervorbringen, als seinen eigenen Körper in Bewegung zu erhalten.

Wenn v die Geschwindigkeit in Meilen für die Stunde bezeichnet, so wird die Kraft eines Menschen, welche er bei dieser Geschwindigkeit während des Fortziehens einer Last ausübt, in Pfunden ausgedrückt durch $\frac{4}{5}(6-v)^2$.

Wenn also $v=0$ ist, oder der Mensch sich in Ruhe befindet, so zieht er mit einer Kraft von 29 Pfund. Wenn er sich mit der Geschwindigkeit von 2 Meilen in der Stunde bewegt, so beträgt seine Zugkraft nur 13 Pfd., und wenn er sich mit einer Geschwindigkeit von 4 Meilen in der Stunde bewegt; so kann er nur eine Zugkraft von 3 Pfd. ausüben und seine größte Geschwindigkeit endlich beträgt 6 Meilen in der Stunde.

Der hervorgebrachte Effect wird durch das Product aus der ausgeübten Druckkraft und dem beschriebenen Raume ausgedrückt, und ist folglich für 1 Stunde $=\frac{4v}{5}(6-v)^2$.

Setzt man also v resp. gleich 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,
so hat man für v gleich 0 1 2 3 4 5 6
den Effect resp. gleich 0 20 $25\frac{3}{4}$ $21\frac{3}{5}$ $12\frac{4}{5}$ 40,
und folglich ist die Leistung oder der Effect am größten, wenn sich der Mensch mit der Geschwindigkeit von 2 Meilen in der Stunde bewegt.

§. 254. Die Zugkraft eines Pferdes kann näherungsweise durch $(12-v)^2$ Pfd. ausgedrückt werden, wenn v die Anzahl der Meilen bezeichnet, welche das Pferd in der Stunde zurücklegt. Wenn die Geschwindigkeit 4 Meilen in der Stunde beträgt, so beträgt die Zugkraft 64 Pf. und der Effect wird erhalten, wenn man diese Druckkraft mit dem beschriebenen Raume multiplicirt. Bei der Geschwindigkeit von 4 Meilen in der Stunde ist aber der in der Minute beschriebene Raum $=\frac{5280}{15}=352$ Fuß und daher der Effect für 1 Minute $=22528$. Wenn sich das Pferd mit einer Geschwindigkeit von 1 Meile in der Stunde bewegte, so ergäbe sich der Effect ebenso $=121\times 88=10648$, und bei der Geschwindigkeit von 10 Meilen in der Stunde wäre der Effect nur $=4\times 880=3520$.

Wenn ein Wagen, welcher mit einem Gewichte von 8 Tonnen beladen ist, auf einer Straße mit der Geschwindigkeit von $2\frac{1}{2}$ Meilen in der Stunde von 8 Pferden bei 8 Stunden täglicher Arbeitszeit

fortgezogen werden kann, so wird die Leistung eines Pferdes auf diesem Wege durch 1 Tonne auf 20 Meilen täglich fortbewegt, ausgedrückt, oder wenn die Reibung $\frac{1}{12}$ der Ladung beträgt, so wird die tägliche Leistung eines Pferdes durch $1\frac{2}{3}$ Tonnen auf 1 Meile fortbewegt, ausgedrückt, oder in Pfunden und Fußen durch **1971200**, und folglich für die Minute durch **41066**. Eine Schnellpost, welche 2 Tonnen wiegt, und sich mit der Geschwindigkeit von 10 Meilen in der Stunde fortbewegt, erfordert nach beiden Richtungen eben so viel Pferde, als sie sich um Meilen fortbewegt; also ist die tägliche Leistung eines Pferdes $=2$ Tonnen auf 2 Meilen, oder $=1$ Tonne auf 4 Meilen fortbewegt, und bei dieser großen Geschwindigkeit ist folglich die Leistung des Pferdes nur $\frac{1}{5}$ von der Leistung in dem andern Falle, nämlich **8215**.

§. 255. Aufgabe. Die Leistung der Thiere durch eine, in einer Dampfmaschine angewandte, entsprechende Quantität Kohlen auszudrücken.

Beispiel. Wir haben eben angenommen, dass der 1 Pfd. Kohlen entsprechende Effect $=840000$ und die tägliche Leistung eines Mannes $=1500000$ ist, und folglich ist letztere ungefähr der 2 Pfd. Kohlen entsprechenden Leistung gleich.

§. 256. Um den Effect eines Menschen oder Pferdes für eine Minute mit dem einer Dampfmaschine für dieselbe Zeit zu vergleichen, muss man die Geschwindigkeit der letztern kennen. Der Druck auf den Kolben, mit dem in der Minute beschriebenen Raume multiplicirt, drückt nach dem Vorhergehenden den Effect für die Minute aus. Aber dieser Druck auf den Kolben verhält sich wie die in Zollen ausgedrückte Größe der Kolbenfläche und wie der auf den Kreiszoll wirkende Druck, und wenn der Druck der Atmosphäre die angewandte Kraft ist, so beträgt der nutzbare Theil dieses Druckes 5,9 Pfd., so dass sich der wirksame Druck auf den Kolben leicht finden lässt. Der von dem Kolben vermöge der Wirkung des atmosphärischen Druckes in der Minute beschriebene Raum wird gefunden, wenn man die Länge eines Kolbenlaufes mit der Anzahl der in der Minute stattfindenden doppelten Kolbenläufe multiplicirt.

Beispiel. Der Durchmesser des Cylinders einer atmosphärischen Maschine sei 72 Zoll und die Länge des Kolbenlaufes $=9$ Fuß, und es sollen in der Minute 9 Kolbenläufe stattfinden, so ist der Druck auf den Kolben $=(72)^2\times 5{,}9$ Pfd. und der in der Minute beschriebene Raum $=9\times 9$; folglich die Leistung für die Minute $=(72)^2\times 5{,}9\times 81=2477433{,}6$, und wenn diese Zahl durch 23090 dividirt wird, so erhält man die Stärke der Maschine $=75$ Pferdekräfte.

Ueber den Einfluss der Federn auf die Größe des hervorgebrachten Effectes.

§. 257. Wenn ein Fuhrwerk mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit auf einer ebenen horizontalen Straße fortrollt, so muss darauf stets eine der Reibung gleiche Zugkraft nach der Richtung der Bewegung wirken, und wenn sich das Fuhrwerk mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit eine geneigte Ebene hinauf bewegt, so muss die Zugkraft der Summe aus der Reibung und der relativen Schwere des Fuhrwerkes gleich sein. In diesen Fällen bewegen sich alle Theile des Fuhrwerkes gleichförmig in parallelen Linien, und wenn irgend eine Veränderung der Geschwindigkeit stattfindet, so kann man annehmen, dass sie durch eine Kraft hervorgebracht wird, welche an der Achse des Rades wirkt, und sich auch vorstellen, dass die ganze Masse des Fuhrwerkes in dem Punkte, worauf diese Kraft wirkt, vereinigt sei.

Wenn sich ein Fuhrwerk längs einer ebenen horizontalen Straße fortbewegt, und plötzlich über ein kleines Hinderniss, wie ein Stein, geht, so bewegen sich die Theile desselben nicht mehr in geraden Linien. Wenn man sich die Theile eines Fuhrwerkes als vollkommen starr denkt, und annimmt, dass das Hinderniss eine solche Form hat, dass es von dem über dasselbe gehenden Rade nur in einem einzigen Punkte berührt wird, so ist klar, dass der Mittelpunkt des Rades, während es über das Hinderniss geht, einen Kreisbogen beschreibt, dessen Mittelpunkt der Berührungspunkt ist. Der Mittelpunkt des Rades beschreibt also einen Weg, welcher plötzlich von einer geraden Linie in einen Kreisbogen und nachdem das Hinderniss überwunden ist, wieder in eine gerade Linie übergeht.

Wenn das ganze Fuhrwerk als vollkommen starr angenommen wird, so geht bei dem Ueberwinden des Hindernisses ein Theil der Geschwindigkeit verloren, zu dessen Wiederherstellung ein neuer Zusatz von Kraft erfordert wird.

§. 258. Aufgabe. Den Kraftaufwand zu finden, welcher erfordert wird, um ein starres Fuhrwerk, welches auf einer horizontalen Straße über ein kleines Hinderniss geht, in einer gleichförmigen Bewegung zu erhalten.

Es sei a die Geschwindigkeit, r der Halbmesser des Rades und h die Höhe des Hindernisses. Wenn das Rad mit dem Hinderniss in Berührung kommt, so bildet der nach dem Berührungspnnkte gezogene Halbmesser mit der Verticale einen Winkel, dessen Sinusversus $= \frac{h}{r}$ ist, und dieser Halbmesser dreht sich alsdann um den Berührungspunkt, woraus erhellet, dass der neue Weg des Mittelpunktes des Ra-

des mit der Horizontallinie einen Winkel α bildet, dessen Sinusversus für den Halbmesser r gleich h ist.

Nachdem der Mittelpunkt des Rades die horizontale Richtung seiner Bewegung plötzlich in eine Richtung verändert hat, welche mit dem Horizonte einen Winkel α bildet, ist ein Theil seiner Geschwindigkeit verlorengegangen, und die Geschwindigkeit, welche er behält, ist $= a \cos \alpha$ (§. **154.** Zus. **5**). Es sei e der von der Reibung etc. herrührende gleichförmige Widerstand auf der horizontalen Straße und f die Kraft, welche, wenn das Fuhrwerk über das Hinderniss geht, nach der Richtung der Bewegung wirkt, und so beschaffen ist, dass die Geschwindigkeit nach der Ueberwindung des Hindernisses dieselbe ist, als ehe das Fuhrwerk auf dasselbe stieß.

Es sei m die Masse des Fuhrwerkes, welche als im Mittelpnnkte des Rades vereinigt gedacht wird, und der von der Reibung etc. herrührende Widerstand sei für den krummlinigen Theil des Weges des Radmittelpunktes derselbe, als für die horizontalen geradlinigen Theile. An jedem Punkte des krummlinigen Theiles des Weges des Radmittelpunktes lässt sich die Schwere nach der Richtung der Bewegung zerlegen, und es sei g' dieser Theil derselben, so ist die ganze beschleunigende Kraft bei dem Ersteigen des Hindernisses $= \frac{f-e}{m} - g'$, und die Veränderung der Geschwindigkeit während jedes Elementes der Bewegung ist der Unterschied zwischen der von der constanten Kraft $\frac{f-e}{m}$ herrührenden Beschleunigung und der von der veränderlichen Kraft g' herrührenden Verzögerung. Es sei u die Geschwindigkeit des Radmittelpunktes im höchsten Punkte seines krummlinigen Weges und l die Länge des letztern von dem Anfangspunkte bis zu dem höchsten Punkte desselben; so wird nach §. **163.** Zus. **3.** das Quadrat der Geschwindigkeit während des Durchlaufens des Raumes l durch die Wirkung der Kraft $\frac{f-e}{m}$ um die Größe $2\frac{f-e}{m} l$ verändert, und da h die verticale Höhe des höchsten Punktes über dem tiefsten ist; so wird das Quadrat der Geschwindigkeit durch die Wirkung der Schwere um die Größe $2gh$ geändert. Da aber $a \sin \alpha$ die Geschwindigkeit in dem tiefsten Punkte ist, so ist folglich:

$$u^2 = a^2 \cos^2 \alpha + 2\frac{f-e}{m} l - 2gh.$$

Wenn nun die Geschwindigkeit in dem höchsten Punkte der Geschwindigkeit vor der Berührung des Hindernisses gleich sein soll; so ist $u = a$. Ferner ist:

$$\cos\alpha = \frac{r-h}{r}; \text{ also } \cos^2\alpha = 1 - \frac{2h}{r} + \frac{h^2}{r^2};$$

folglich: $$u^2 = a^2\left(1 - \frac{2h}{r} + \frac{h^2}{r^2}\right) + 2\frac{f-e}{m}l - 2gh,$$

und: $$(f-e)l = mgh + m\left[a^2\frac{h}{r} - a^2\frac{h^2}{2r^2}\right].$$

Aber der der Länge l entsprechende horizontale Weg des Radmittelpunktes ist $= r\sin\alpha$ und l ist der Bogen, welchem in horizontaler Richtung der Sinus für den Halbmesser r entspricht; also $l = r\alpha$, und mithin ist die erforderliche Kraft, wenn die Straße vollkommen horizontal wäre, bei derselben Reibung e gleich $e r \sin\alpha$. Folglich ist der zur Erhaltung der gleichförmigen Geschwindigkeit erforderliche Kraftaufwand:

$$fl - e r \sin\alpha = l(f-e) + e r(\alpha - \sin\alpha),$$

oder wegen: $$\alpha = \sin\alpha + \frac{\sin^3\alpha}{6} + \text{etc.},$$

$$= l(f-e) + \frac{er}{6}\sin^3\alpha + \text{etc.}$$

und da α sehr klein ist, so können die Glieder mit $\sin^3\alpha$, etc. hinweg gelassen werden. Der erforderliche Kraftüberschuss ist also

$$= (f-e)l = mgh + m\left[a^2\frac{h}{r} - a^2\frac{h^2}{2r^2}\right].$$

Das erste Glied auf der zweiten Seite ist der Theil dieses Kraftüberschusses, welcher dem Ersteigen des Hindernisses entspricht, und das zweite Glied der Theil, welcher von der plötzlichen Veränderung der Richtung herrührt.

§. **259.** Aufgabe. Die beiden eben erwähnten Theile des zur Ueberwindung eines Hindernisses erforderlichen Kraftaufwandes mit einander zu vergleichen.

Das Verhältniss dieser beiden Theile ist:

$$gh : a^2\frac{h}{r} - a^2\frac{h^2}{2r^2}, \text{ oder } gr : a^2 - \frac{a^2 h}{2r^2}.$$

Wenn h gegen r sehr klein ist, so wird dieses Verhältniss $= \frac{g}{r} : a^2$, und der von dem Gewichte herrührende Widerstand ist kleiner als der von dem Stoße herrührende, so lange $gr^2 < a^2$ ist, d. h. so lange die Geschwindigkeit des Fuhrwerkes größer ist, als die bei dem freien Falle durch den halben Radhalbmesser erlangte Geschwindigkeit.

Beispiel. Ein Fuhrwerk, welches sich mit einer Geschwindig-

keit von 10 Meilen in der Stunde bewegt, und Räder von 4 Fuß im Durchmesser hat, geht plötzlich über ein kleines Hinderniss, und man soll den von dem Stoße und den von dem Gewichte herrührenden Widerstand mit einander vergleichen.

Die Geschwindigkeit ist $= \frac{5280 \times 10}{60 \times 60} = 14$ Fuß in der Secunde, und das Verhältniss der beiden Widerstände ist daher näherungsweise $= (14)^2 : 32 \times 2 = 3 : 1$.

§. **260.** Der von dem Stoße herrührende Widerstand kann größtentheils durch die Anwendung von Federn beseitigt werden; denn bei dem Theile des Fuhrwerkes, welcher auf Federn ruht, findet keine plötzliche Veränderung der Richtung der Bewegung der Theile statt, und wenn das Rad auf das Hinderniss stößt; so üben die Federn auf den auf ihnen ruhenden Theil des Fuhrwerkes einen Druck aus, und der Weg seines Schwerpunktes weicht von der geraden Linie ab; aber er beschreibt eine Curve, woran der geradlinige Theil des Weges dieses Punktes eine Tangente ist, und die beiden auf einander folgenden Theile dieses Weges bilden folglich keinen endlichen Winkel mit einander. Die Abnahme der Geschwindigkeit von a bis $a \cos \alpha$ findet also in den auf den Federn ruhenden Theilen nicht statt. Wenn wir annehmen, dass die Wirkung der Federn beständig auf der Linie senkrecht ist, welche der Schwerpunkt des auf den Federn ruhenden Theiles beschreibt, so findet bei der Veränderung der Richtung der Bewegung dieses Theiles kein Geschwindigkeitsverlust statt, und es ist daher bei der Anwendnng von Federn in dieser Voraussetzung der Theil des zur Ueberwindung des Hindernisses erforderlichen Kraftaufwandes, welcher von der plötzlichen Veränderung der Richtung der Bewegung herrührt, und, wie wir gesehen haben, bei weitem der größere Theil ist, überflüssig.

§. **261.** Wenn das Fuhrwerk über das Hinderniss geht, und seinen ursprünglichen Weg darüber hinaus fortsetzt, so sind noch einige andere Betrachtungen erforderlich.

Aufgabe. Den Kraftaufwand zu finden, welcher auf ein starres Fuhrwerk ausgeübt wird, wenn es auf einer ebenen horizontalen Straße über ein kleines Hinderniss geht.

Es sei h die Höhe des Hindernisses und die übrigen Bezeichnungen dieselben, wie in §. **256.**, so ist für das Ersteigen des Hindernisses, wie zuvor:

$$u^2 = a^2 \cos^2 \alpha + 2 \frac{f - e}{m} l - 2 g h,$$

und wenn v die Geschwindigkeit nach dem Herabsteigen des Rades von dem Hindernisse ist, so ist ebenso:

$$v^2 = u^2 + 2\frac{f-e}{m}l + 2gh = a^2\cos^2\alpha + 4\frac{f-e}{m}l.$$

Die Länge des aufsteigenden Bogens ist dieselbe, als die des herabsteigenden und die Winkel, welche diese Bogen mit der Horizontallinie bilden, sind an beiden Enden dieselben. Die Geschwindigkeit v wird, wenn die Bewegung des Fuhrwerkes wieder die horizontale Richtung annimmt, durch die Veränderung der Richtung auf $v\cos\alpha$ reducirt; aber sie muss dieselbe sein, wie zuvor; folglich ist $v\cos\alpha = a$, und:

$$a^2 = v^2\cos^2\alpha = a^2\cos^4\alpha + 4\frac{f-e}{m}l\cos^2\alpha;$$

also:
$$2(f-e)l = m\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1-\cos^4\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

Wenn wir, wie vorhin, $1-\frac{h}{r}$ für $\cos\alpha$ setzen, weil h klein ist, so haben wir:

$$2(f-e)l = m\,.\,a^2\,.\,\frac{2h}{r},$$

und dieses ist, wie vorhin, der Kraftaufwand, welcher zur Ueberwindung des Hindernisses mehr erfordert wird, als wenn dasselbe nicht vorhanden wäre. In diesem Falle verschwindet der von dem Gewichte herrührende Widerstand, weil das Fuhrwerk bei dem Herabsteigen von dem Hindernisse durch die Schwere ebensoviel beschleunigt wird, als es bei dem Ersteigen desselben verzögert wurde.

§. **262.** Wenn die Straße gepflastert ist, so kann sie als eine Reihe zusammenhängender Hindernisse betrachtet werden, und das Fuhrwerk bewegt sich nie in einer Horizontallinie. In diesem Falle kann man annehmen, dass der Mittelpunkt des Rades eine Reihe von Kreisbogen beschreibt, deren Mittelpunkte die höchsten Punkte der Pflastersteine sind, über welche das Rad geht.

Wir wollen annehmen, dass alle diese Kreisbogen einander gleich sind, und dass jeder derselben an seinen beiden Enden mit der Horizontallinie einen Winkel α bildet, so wird die Richtung der Bewegung des Mittelpunktes des Rades bei dem Uebergange von dem einen Bogen zum andern plötzlich um einen Winkel 2α geändert, welcher aber im Allgemeinen klein ist.

Aufgabe. Wenn sich ein Fuhrwerk längs einer hori-

zontalen, regelmäßig gepflasterten Straße fortbewegt, den Kraftaufwand zu finden, welcher außer dem zur Ueberwindung der Reibung erforderlichen wegen der Unebenheiten der Straße zu einer gleichförmigen Bewegung des Fuhrwerkes noch erfordert wird.

Es sei u die Geschwindigkeit am höchsten Punkte jedes Bogens, welchen der Mittelpunkt des Rades beschreibt, und die übrige Bezeichnung wie oben; so ist:

$$v^2 = u^2 + 2\frac{f-e}{m}l - 2.gh,$$

und da das Fuhrwerk das nächste Aufsteigen mit der Geschwindigkeit $v\cos 2\alpha$ beginnt, so hat es an der nächsten Spitze dieselbe Geschwindigkeit u, und es ist:

$$u^2 = v^2\cos^2 2\alpha + 2\frac{f-e}{m}l - 2gh;$$

folglich: $$u^2 = v^2\cos^2 2\alpha + 4\frac{f-e}{m}l,$$

und: $$2(f-e)l = \tfrac{1}{2}mv^2\sin^2 2\alpha,$$

und der erforderliche Kraftüberschuss ist, wie vorhin:

$$2fl - 2er\sin\alpha = 2(f-e)l + 2er(\alpha - \sin\alpha)$$
$$= \tfrac{1}{2}mv\sin^2 2\alpha + 2er(\alpha - \sin\alpha),$$

oder da $\alpha = \sin\alpha + \frac{\sin^3\alpha}{6} + \text{etc.}$ ist:

$$\text{Kraftüberschuss} = 2mv^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + er\frac{\sin^3\alpha}{6},$$

oder wenn man $\sin^2\alpha = 1$ und $\sin^3\alpha$ seiner Kleinheit wegen vernachlässigt:

$$\text{Kraftüberschuss} = 2mv^2\sin^2\alpha.$$

Wenn man $\frac{h^2}{r^2}$ seiner Kleinheit wegen unberücksichtigt lässt, so ist

$\sin\alpha = \sqrt{\frac{2h}{r}}$ und $v^2 = u^2$; folglich der Kraftüberschuss $= \frac{2mu^2h}{r}$.

Zusatz. Der wegen der Rauheit der Straße erforderliche Kraftaufwand verhält sich also direct wie das Quadrat der Geschwindigkeit und die Höhe der Pflastersteine und umgekehrt wie der Halbmesser der Räder.

§. 263. Der in Rede stehende Kraftaufwand wird durch Anwendung von Federn, wodurch die plötzliche Veränderung der Richtung

der Bewegung des auf ihnen ruhenden Theiles vermieden wird, vermindert, und wenn die Federn sehr biegsam und vollkommen elastisch sind, so wird der von den successiven Stößen herrührende Widerstand in Beziehung auf den auf diesen Federn ruhenden Theil ganz beseitigt.

§. **264.** Dieses ist die Wirkung der Federn als mit dem Gegenstande des gegenwärtigen Kapitels zusammenhängend; aber ein nicht minder wichtiger Umstand ist die Erhaltung der Fuhrwerke und der Straßen, weil beide durch das Zusammentreffen harter Körper abgenutzt werden, und in dem folgenden Kapitel wollen wir zeigen, wie sich die Effecte dieses Zusammentreffens in einigen Fällen bestimmen lassen.

Zehntes Kapitel.

Ueber den Zusammenhang zwischen Druck und Stoß.

§. **265.** Es ist bereits in §. **128** bemerkt worden, dass der Stoß in der Wirklichkeit ein Druck von kurzer Dauer ist, und die Dauer des Druckes hängt ceteris paribus von der Masse ab, woraus die gegen einander stoßenden Körper bestehen, und namentlich von ihrer Härte. Die Veränderung dieses Elementes ist mit verschiedenen Folgen verbunden, wovon wir einige hier näher betrachten wollen.

Gesetzt, ein Hammer bewegte sich mit einer beträchtlichen Geschwindigkeit gegen einen harten Block, welcher mit einer sehr großen Kraft widersteht, und die Größe dieser Kraft ist unter übrigens gleichen Umstände von der eigenen Härte des Blockes und der Härte des Hammers abhängig. So bringt z. B. ein eiserner Hammer eine größere Wirkung hervor, als ein weicher wollener Ball, und ein eiserner Amboß widersteht mit einer größern Kraft, als ein weiches Kissen. Dieses lässt sich leicht erklären; denn das Moment des Hammers muss durch eine endliche, während einer endlichen Zeit wirkende Kraft aufgehoben werden, und je kürzer die Zeit ist, desto größer muss die Kraft sein. Aber die Zeit ist offenbar für die Körper am kürzesten, welche von einer gegebenen Kraft am wenigsten zusammengedrückt werden, weil die Zeit, in welcher das Moment des Hammers aufgehoben wird, mit dem Augenblicke der ersten Berührung beginnt, und aufhört, wenn sich der Schwerpunkt des stoßenden Körpers dem des gestoßenen am meisten genähert hat, d. h. wenn die Summe ihrer Zusammendrückungen den größten Werth erreicht hat. Je weniger alsdann diese Zusammendrückung beträgt, desto kleiner ist der Raum, welchen der stoßende Körper beschreibt, bevor sein Moment aufgehoben ist und desto größer ist folglich die ihm widerstehende Kraft.

§. **266.** Um diesen Gegenstand der Rechnung unterwerfen zu können, muss man irgend ein Gesetz zwischen der Zusammendrückung eines Körpers und der Kraft, mit welcher er in seinen frühern Zustand zurückzukehren strebt, annehmen, und die wahrscheinlichste Annahme ist, dass diese Kraft der Größe der Zusammendrückung proportional sei. Wenn also x der Raum ist, um welchen die Oberfläche des gestoßenen Körpers nachgibt, so ist $\frac{x}{a}$ die Kraft, welche erfordert wird, sie in diesem Zustande zu erhalten, wo a ein constanter Coefficient ist, welcher für verschiedene Körper verschieden ist.

Desgleichen, wenn b eine Constante und y der Raum ist, um welche die Oberfläche des stoßenden Körpers nachgibt, so drückt $\frac{y}{b}$ die ausgeübte Kraft aus.

§. **267** Lehrsatz. Wenn ein Körper gegen einen andern stößt, so ist die ausgeübte Kraft desto größer, je härter der Körper ist.

Es sei, wie vorhin, $\frac{x}{a}$ und $\frac{y}{b}$ resp. die von dem gestoßenen und stoßenden Körper ausgeübte Kraft, so müssen beide einander gleich sein, nämlich $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$. Es sei H das Gewicht des stoßenden Körpers oder Hammers, V seine Geschwindigkeit im Augenblicke der ersten Berührung und s der seit diesem Augenblicke von seinem Schwerpunkte beschriebene Raum, so wird dieser Raum in Folge der Zusammendrückung der beiden Körper beschrieben, und folglich ist $s = x + y$.

Aber da $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ ist, so ist $y = \frac{bx}{a}$ und $\frac{a+b}{a} x = x + y = s$;

also: $$x = \frac{as}{a+b}, \text{ und ebenso } y = \frac{bs}{a+b}.$$

Wenn ferner g die Schwerkraft bezeichnet, so ist $\frac{gy}{b}$ der Druck auf H und die Kraft, welche H verzögert, ist $= \frac{gy}{Hb} = \frac{1}{a+b} \cdot \frac{H}{gs}$.

Wir haben also vermöge der Gleichung $v \cdot \frac{dv}{ds} = f$ in §. **117**, weil v die Geschwindigkeit von H ist:

$$v\frac{dv}{ds} = \frac{1}{a+b} \cdot \frac{gs}{H}; \text{ also } v^2 = C - \frac{1}{a+b} \cdot \frac{gs^2}{H},$$

und da $s = o$ ist, wenn $v = V$ ist, so ist $v^2 = V^2 - \frac{gs^2}{H(a+b)}$.

Wenn $v = o$ ist, so ist $s = V\sqrt{\frac{(a+b)H}{g}}$, und der Druck in diesem Augenblicke gleich $\frac{y}{b} = \frac{s}{a+b} + \frac{V\sqrt{H}}{\sqrt{(a+b)g}}$. In diesem Augenblicke ist die ganze Bewegung des Hammers aufgehoben, und die Zusammendrückung sowohl, als die Kraft ist am größten, d. h. die Kraft nimmt von dem ersten Berührungsaugenblicke an, wo sie $= o$ ist, bis zu dem Werthe:

$$\frac{V\sqrt{H}}{\sqrt{(a+b)g}}$$

zu. Je härter aber die Körper sind, desto größer ist die Kraft für eine gegebene Zusammendrückung und desto kleiner sind die Größen a und b.

Zusatz. Aus dem hier angenommenen Gesetze erhellet, dass die ausgeübte Kraft sich unter übrigens gleichen Umständen wie die Quadratwurzel aus dem Gewichte des Hammers verhält.

Da der gestoßene Körper in dem vorhergehenden Falle als durch ein unüberwindliches Hinderniss in Ruhe erhalten angenommen ist, so ist dieses der größte Druck, welchen der Stoß von H auf den andern Körper ausüben kann; denn wenn sich dieser andere Körper bewegen kann, so ist die auf ihn ausgeübte Druckkraft offenbar nicht so groß, und wir wollen nun den Effect des Stoßes betrachten, wenn sich der gestoßene Körper bewegt, indem er einen gleichförmigen Widerstand ausübt, und zwar wollen wir zuerst den Fall untersuchen, wo die Masse oder das Gewicht des gestoßenen Körpers unberücksichtigt bleiben kann, wie dieses ungefähr bei einem auf einen Nagel, dessen Reibung in dem Holze als gleichförmig angenommen wird, schlagenden Hammer der Fall ist.

§. 268. Aufgabe. Man soll bestimmen, wie weit ein gegebener Hammer einen Nagel in einen Gegenstand treibt.

Wenn wir dieselben Bezeichnungen, wie vorhin, beibehalten und die Reibung des Nagels mit F bezeichnen, so ist klar, dass der Nagel nicht eher anfängt sich zu bewegen, als bis die Zusammendrückung des Nagels und Hammers so groß ist, dass dadurch eine Druckkraft $f = F$ hervorgerufen wird, welches der Fall ist, wenn:

$$\frac{y}{b} = \frac{1}{a+b}\, s = F, \text{ oder } s = (a+b)F$$

ist. Wenn also v die Geschwindigkeit des Hammers für den Augen-

blick bezeichnet, wo der Nagel anfängt, sich zu bewegen, so ist nach dem vorhergehenden §:

$$v^2 = V^2 - \frac{g s^2}{H(a+b)} = V^2 - \frac{g}{H}(a+b)F^2.$$

Nun ist zu bemerken, dass sich der Hammer und Nagel bei dem gleichförmigen Widerstande der Reibung F des letztern so lange fortbewegen, bis das Moment des Hammers aufgehoben ist. Es sei s' der Raum, durch welchen sie sich bewegen, so ist nach §. **162.**, da die verzögernde Kraft $= \frac{Fg}{H}$ ist:

$$s' = \frac{v^2}{2\frac{Fg}{H}} = \frac{H}{2g}\left(\frac{V^2}{F} - \frac{g}{H}(a+b)F\right),$$

und dieser Raum ist $= o$ oder der Nagel wird durch den Schlag gar nicht bewegt, wenn:

$$V^2 \leqq \frac{g}{H}(a+b)F^2$$

ist.

Wenn V sehr groß ist, so ist der Raum, durch welchen der Nagel bewegt wird, fast unabhängig von der Härte; aber wenn V blos hinreichend ist, den Nagel zu bewegen, so wird durch eine kleine Zunahme der Härte des Hammers oder des Nagels der Raum, durch welchen sie sich bewegen, vergrößert. Wegen des Widerstandes der Reibung des in einen Block geschlagenen Nagels wird auch letzterer gleichzeitig mit fortbewegt, wodurch offenbar dasselbe bewirkt wird, als durch die Weichheit des Nagels, d. h. die Constante b nimmt zu, und folglich wird der Nagel unter übrigens gleichen Umständen in eine Substanz, welche nicht nachgibt, weiter getrieben, als in eine solche, bei welcher dieses Nachgeben der Fall ist.

Da an der Grenze der Bewegung $V^2 H = g F^2 (a+b)$ ist, so bringt, wenn die Körper sehr hart, oder a und b sehr klein sind, ein kleiner Hammer mit einer großen Geschwindigkeit die Wirkung eines sehr großen Druckes F hervor. So bringt z. B. ein Schmiedehammer bei dem Einschlagen eichener Pfähle einen ebenso großen Effect hervor, als ein Druck von **70** Tonnen.

Wir wollen nun auch den Fall betrachten, wo das Gewicht des bewegten Körpers mit in Betracht gezogen werden muss.

§. **269.** Aufgabe. Ein Pfahl von dem Gewichte W wird durch einen Hammer oder einen Rammklotz H, der mit einer Geschwindigkeit V darauf schlägt, in die Erde

getrieben, und man soll die Bewegung desselben finden, wenn die Reibung $= F$ gesetzt wird.

In diesem Falle muss sowohl das Gewicht, als das Moment des Hammers oder Rammklotzes in Betracht gezogen werden, und es sei s' der Raum, um welchen die Körper zusammengedrückt werden, ehe der Pfahl anfängt, sich zu bewegen; so ist dieses der Fall, wenn die niederwärts gerichtete Kraft dem Widerstande gleich, d. h. wenn $\frac{y}{b} + W = F$ ist.

Folglich ist:

$$\frac{s'}{a+b} = \frac{y}{b} = F - W, \quad s' = (a+b)(F-W),$$

und, wie vorhin:

$$\frac{v\,dv}{ds} = -\frac{1}{a+b}\cdot\frac{gs}{H} + g;$$

$$\text{also:} \qquad v^2 = V^2 - \frac{1}{a+b}\cdot\frac{gs^2}{H} + 2gs,$$

weil für $s = o$, $v = V$ ist, und wenn V' die Geschwindigkeit des Rammklotzes ist, wenn der Pfahl anfängt sich zu bewegen, so ist, indem man s' für s setzt:

$$V'^2 = V^2 - \frac{g}{H}(a+b)(F-W)^2 + 2g(a+b)F - W. \quad (1)$$

Da nun die Trägheit des Pfahles der Mittheilung der Bewegung widersteht, so nimmt die Zusammendrückung nach dem in Rede stehenden Zeitpunkte fortwährend zu. Es sei r der Raum, durch welchen sich der Rammklotz seit der ersten Berührung des Pfahles und p der Raum, durch welchen sich der Pfahl selbst bewegt hat, so ist $p = r - s$ und $s = r - p$.

Für die Bewegung des Rammklotzes hat man aber nach §. 117:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = g - \frac{s}{a+b}\cdot\frac{g}{H'}$$

und für die des Pfahles:

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = g + \frac{s}{a+b}\cdot\frac{g}{W} - \frac{Fg}{W},$$

oder, wenn man subtrahirt:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{gs}{a+b}\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{W}\right) + \frac{Fg}{W}$$

$$= -n^2 s + \frac{Fg}{W}, \text{ wo } n^2 = \frac{g}{a+b}\cdot\frac{H+W}{HW} \text{ ist;}$$

folglich ist:

$$s = \frac{Fg}{n^2 W} + A\cos nt + B\sin nt.$$

Wird $t = o$ gesetzt, wenn der Pfahl anfängt, sich zu bewegen, so ist, wie bereits früher gezeigt worden, in diesem Zeitpunkte $s' = (a+b)(F - W)$; folglich:

$$(a+b)(F-W) = \frac{Fg}{n^2 W} + A = (a+b).\frac{FW}{H+W} + A;$$

also: $$A = (a+b)\left(\frac{FW}{H+W} - W\right).$$

Dagegen ist für $t = o$ die Geschwindigkeit des Pfahles $= o$ und die des Rammklotzes $= V$; folglich:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{dr}{dt} - \frac{dp}{dt} = V' - o = V'.$$

Aber allgemein ist:

$$\frac{ds}{dt} = -An\sin nt + Bn\cos nt,$$

$$Bn = V',\ B = \frac{V'}{n};$$

folglich wenn man für A, B, n^2 ihre Werthe substituirt:

$$s = (a+b)\frac{FH}{H+W} + (a+b)\left(\frac{FW}{H+W} - W\right)\cos nt + \frac{V'}{n}\sin nt,$$

und wenn man diesen Werth in den von $\frac{d^2 p}{dt^2}$ substituirt:

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = g\left(1 - \frac{F}{H+W}\right)(1 - \cos nt) + \frac{V' g}{(a+b)nW}\sin nt,$$

oder wenn man $g\left(\frac{F}{H+W} - 1\right) = m$ setzt:

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = -m + m\cos nt + \frac{V' g}{(a+b)nW}\sin nt.$$

Integriren wir nun zweimal hinter einander und setzen für $t = o$ sowohl $\frac{dp}{dt}$, als p gleich Null; so erhalten wir:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{m}{n}(nt - \sin nt) + \frac{V' g}{(a+b)n^2 W}(1 - \cos nt),$$

$$p = \frac{m}{n^2}(1 - \tfrac{1}{2}n^2 t^2 - \cos nt) + \frac{V' g}{(a+b)n^3 W}(nt - \sin nt). \quad (2)$$

Wenn nun der Pfahl aufhört, sich zu bewegen; so muß $\frac{dp}{dt} = o$

sein, und folglich ist:

$$\frac{V'g}{(a+b)mnW}(1-\cos nt)+\sin nt-nt=0, \qquad (3)$$

woraus t bestimmt werden kann, und wenn t bekannt ist, so ist auch der ganze Raum p bekannt, durch welchen der Pfahl getrieben wird.

§. **270.** Wenn V' klein angenommen wird, d. h. wenn die Geschwindigkeit des Rammklotzes nur eben so groß ist, dass der Pfahl bewegt wird, so lässt sich ein Näherungswerth für p erhalten; denn in diesem Falle ist die Zeit t, während welcher sich der Pfahl bewegt, sehr klein, und wenn wir sin nt und cos nt in Reihen entwickeln, und blos die beiden ersten Glieder nehmen, so erhalten wir:

$$\frac{V'g}{(a+b)mnW}\cdot\frac{n^2t^2}{2}+\frac{n^3t^3}{2.3}=0;$$

also:

$$t=\frac{3V'g}{(a+b)n^2W'}$$

oder wenn wir für $n^2(a+b)$ und m ihre Werthe setzen:

$$t=\frac{3V'H}{g(F-H-W)'}$$

und wenn man diesen Werth von t in die Gleichung (2) substituirt; so erhält man den Werth von p. Nimmt man aber blos das erste Glied, so hat man:

$$p=\frac{V'g}{(a+b)n^3W}\cdot\frac{n^3t^3}{2.3}$$

$$=\frac{gH^3}{2(a+b)W(F-H-W)}\cdot\frac{V'^4}{g^2},$$

woraus sich folgende Schlüsse ziehen lassen:

1) Wenn der Rammklotz den Pfahl eben in Bewegung setzt, so ist V' in der Gleichung (1) klein und eine kleine Zunahme der Härte des Rammklotzes oder Pfahles (d. h. von a oder b) oder des Gewichtes des Rammklotzes (d. h. von H) bewirkt eine beträchtliche Zunahme von V' und der Länge p, um welche der Pfahl in die Erde getrieben wird.

2) Wenn der Widerstand der Reibung F groß angenommen wird, so verhält sich die Länge p sehr nahe umgekehrt wie das Gewicht W des Pfahles, und je leichter folglich der Pfahl ceteris paribus ist, desto tiefer wird er hineingetrieben.

3) Die Länge p ändert sich im geraden Verhältnisse der dritten Potenz des Gewichtes des Rammklotzes, wenn die Geschwindigkeit, mit welcher der Pfahl anfängt, sich zu bewegen, gegeben ist, und da diese

Geschwindigkeit durch die Zunahme des Gewichtes des Rammklotzes selbst vergrößert wird, so ist es aus doppelten Gründen vortheilhaft, den Rammklotz schwer zu nehmen.

§. 271. Die Größen a und b sind von der Härte und Elasticität der stoßenden und gestoßenen Massen abhängig, und wenn wir annehmen, dass ein Körper von dem Durchmesser D durch die Wirkung einer Kraft E eine lineare Zusammendrückung oder Ausdehnung D erfährt (indem das Gesetz, nach welchem die Zusammendrückung x stattfindet, auf diesen Fall ausgedehnt wird), so ist $E = \frac{D}{a}$ und $a = \frac{D}{E}$.

Folglich ist die Kraft für eine Zusammendrückung $x = \frac{Dx}{E}$, und wenn die Kraft E durch das Gewicht einer Säule der Substanz selbst von der Höhe E ausgedrückt wird, so ist E nichts anders, als der Elasticitätsmodulus (s. analytische Statik §. 79.), und je härter die Körper sind, desto größer ist dieser Modulus und desto kleiner ist a.

Der Elasticitätsmodulus beträgt für Eisen oder Stahl ungefähr **9000000** Fuß, und vermittelst dieses Werthes lassen sich die Zahlenwerthe der im Vorhergehenden vorkommenden Größen bestimmen.

Aufgabe 1. Ein eiserner Hammer schlägt mit einer der Fallhöhe h entsprechenden Geschwindigkeit auf einen Amboß, und man soll die Zusammendrückung bestimmen.

Das Gewicht des Hammers H werde durch eine eiserne Säule ausgedrückt, deren Grundfläche der Berührungsfläche des Hammers mit dem Amboß gleich ist. Wenn der Hammer ein Perallelepipedum ist, so ist H der Höhe desselben gleich, und $V^2 = 2gh$, und wenn A der Durchmesser des Amboßes in der Richtung des Schlages ist, so haben wir, weil $a = \frac{A}{E}$ und $b = \frac{H}{E}$ ist:

$$s = \sqrt{2h} \cdot \sqrt{\frac{(A+H)H}{E}}.$$

Wenn also der Hammer $\frac{1}{4}$ Fuß hoch ist, und von einer Höhe von 8 Fuß auf einen Amboß von 2 Fuß Höhe fällt, so ist:

$$s = \sqrt{16} \cdot \sqrt{\frac{\frac{9}{4} \cdot \frac{1}{4}}{9000000}}$$

$$= \frac{1}{4000} \text{ Fuß},$$

d. h. beide, der Hammer und der Amboß, werden um $\frac{1}{1000}$ Fuß zusammengedrückt, und zwar verhält sich die Zusammendrückung des Hammers zu der des Amboßes wie 1 zu 8.

Der größte in diesem Falle stattfindende Druck wird ferner ausgedrückt durch:

$$\frac{\sqrt{2h}\sqrt{HE}}{\sqrt{A+H}} = \frac{\sqrt{16}\times\sqrt{\frac{1}{4}\times 9000000}}{\sqrt{\frac{9}{4}}} = 4000,$$

d. h. in diesem Falle ist der Druck dem Drucke einer Eisensäule von **4000** Fuß Höhe gleich, und wenn wir annehmen, daſſ die Bahn des Hammers **1** Quadratzoll groß ist, so ist der Druck desſelben dem Drucke einer Eisensäule von **48000** Fuß Höhe gleich; also größer als **12000** Pfd.

Aufgabe **2.** Wenn die Reibung eines Nagels, welcher in Holz geschlagen wird, dem Gewichte einer Eisensäule gleich ist, welche die Berührungsfläche des Nagelkopfes mit dem Hammer zur Grundfläche hat, und eine Höhe $= F$ hat, die Länge zu finden, um welche der Nagel bei jedem Schlage hineingetrieben wird.

Wenn dieselben Bezeichnungen wie in der letzten Aufgabe beibehalten werden, indem A die Länge des Nagels bezeichnet, so haben wir nach dem Vorhergehenden:

$$s' = \frac{Hh}{F} - \frac{1}{2}\frac{(A+H)F}{E},$$

oder da A gegen H klein ist:

$$s' = \frac{Hh}{F} - \frac{1}{2}\frac{HF}{E},$$

und folglich wird der Raum, durch welchen der Nagel bei jedem Schlage getrieben wird, wegen der nicht vollkommenen Härte um die Größe $\frac{1}{2}\frac{HF}{E}$ vermindert.

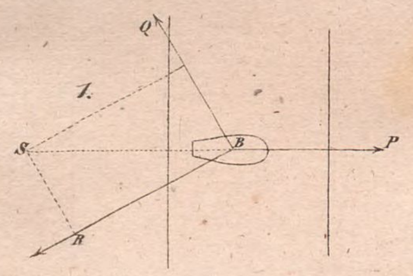
§. **272.** Dieselben Prinzipien lassen sich leicht zur Auflösung von Aufgaben, wie folgende, anwenden: Die Wirkung des Schlages oder Stoßes auf den Keil zu finden, wenn die Reibung in Rechnung gebracht wird; das Gewicht zu finden, welches, wenn es von einer gegebenen Höhe in eine leere Wagschaale fällt, ein in der andern Wagschaale liegendes Gewicht bis zu einer gewissen Höhe hebt, etc.

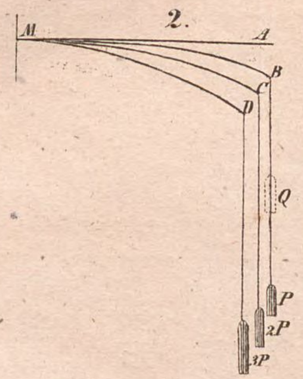
Offenbar kann der Stoß nicht zur Ueberwindung stetig wirkender Kräfte angewandt werden, außer in den Fällen, wo die Kraft aufhört zu wirken, wenn die Bewegung aufhört. Dieses ist der Fall mit dem Widerstande der Reibung und einigen anderen Widerständen, und in solchen Fällen ist die Wirkung des Stoßes größer, als die irgend eines Druckes, welchen man möglicher Weise anwenden könnte.

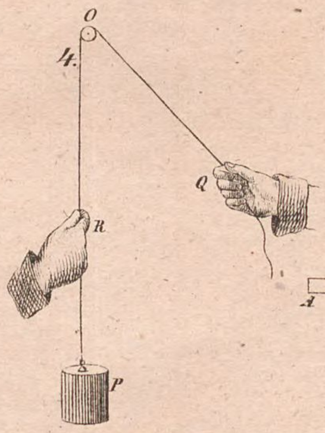
Druckfehler.

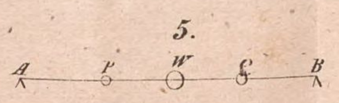
Seite 48. Zeile 11. v. u. l. mittelst eines st. mit, und von Seite 112—118 l. resp. Fig. 142, 143, 144, 145 st. Fig. 162, 163, 164, 165.

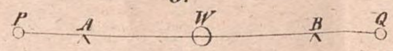
Helmstedt, gedruckt in der Leuckart'schen Buchdruckerei.

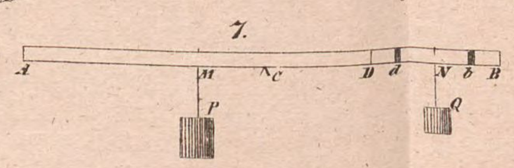


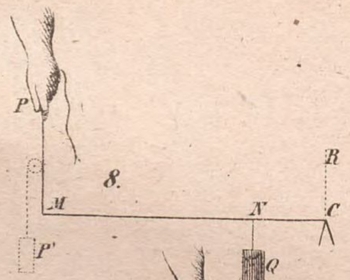


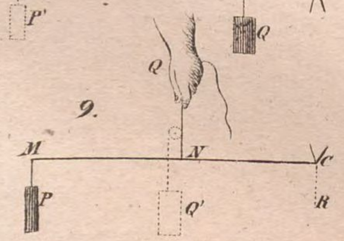


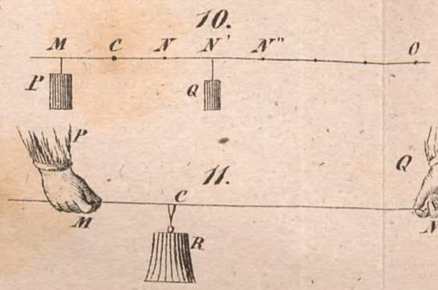


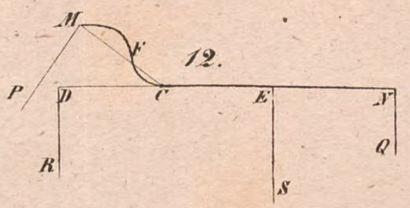


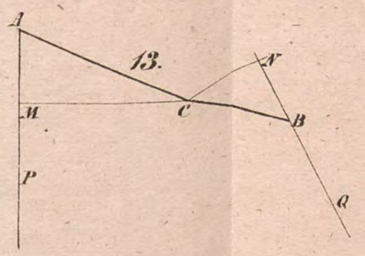


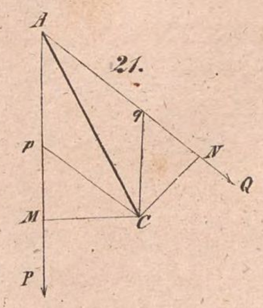


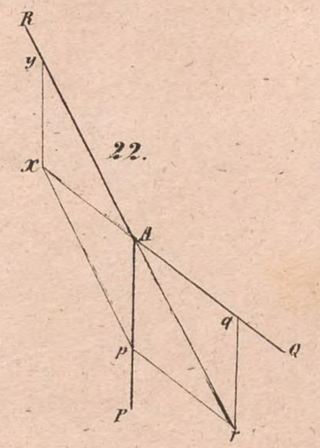


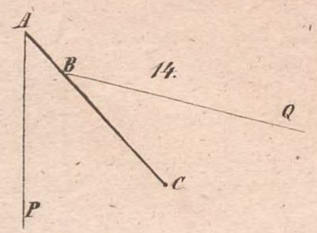


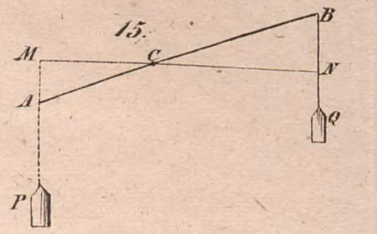


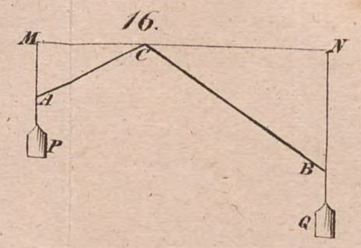


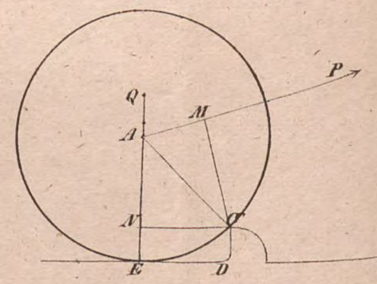


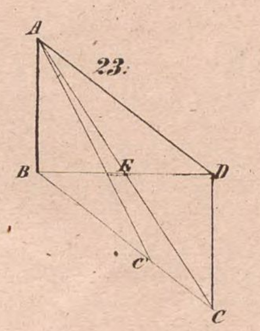


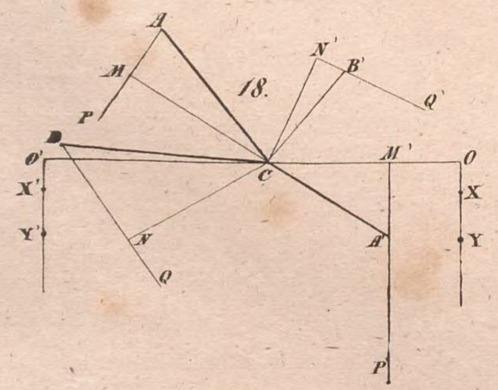


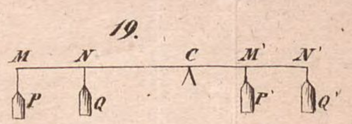


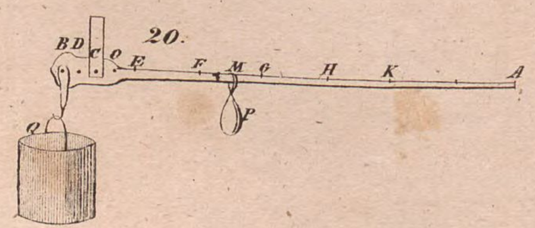


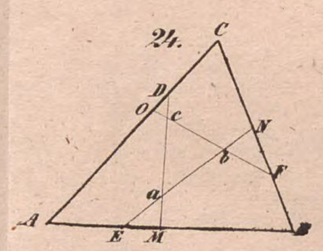






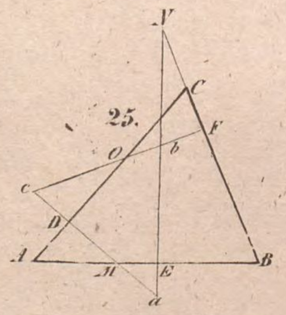




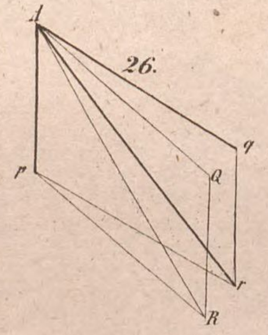


Lith. v. Oehme & Müller in Braunschweig.

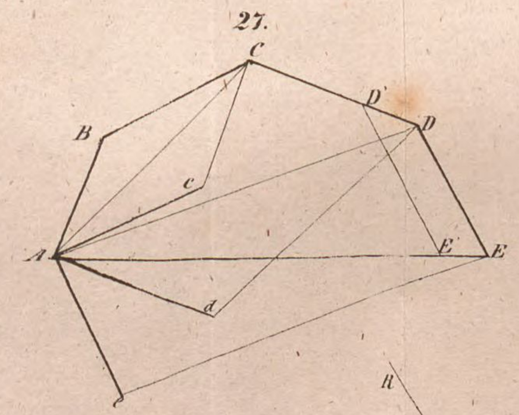
25.



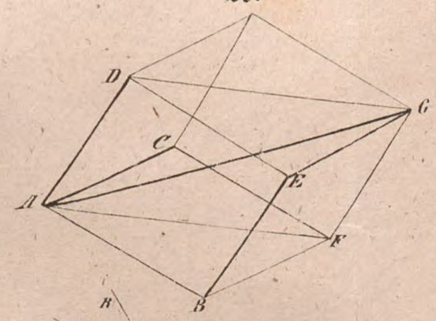
26.



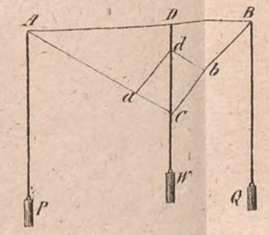
27.



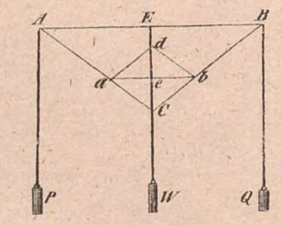
28.



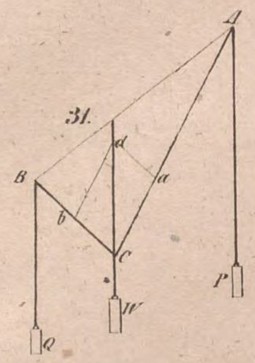
29.



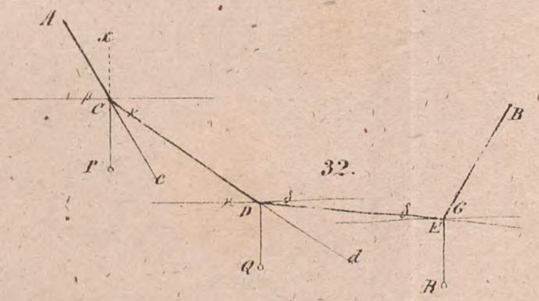
30.



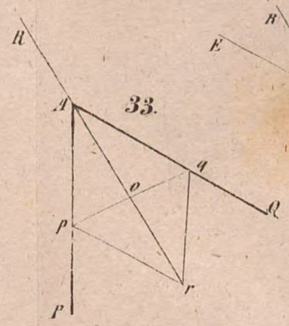
31.



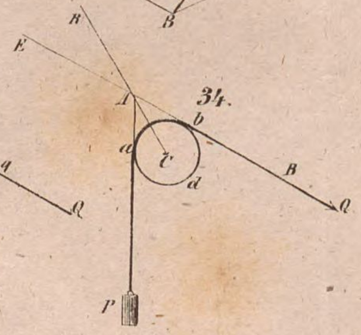
32.



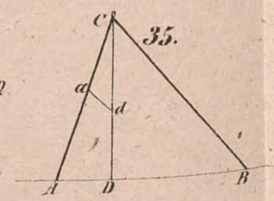
33.



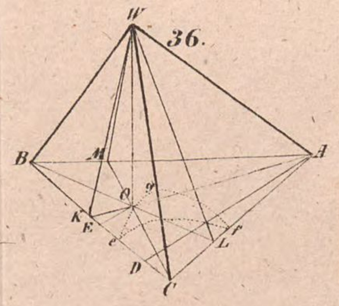
34.



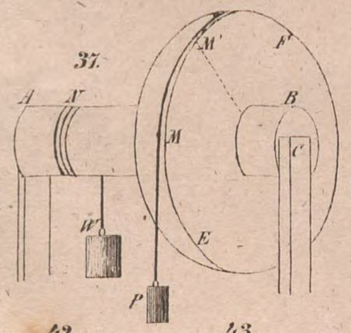
35.



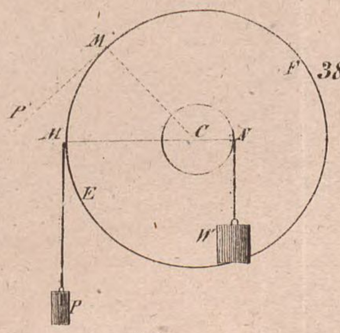
36.



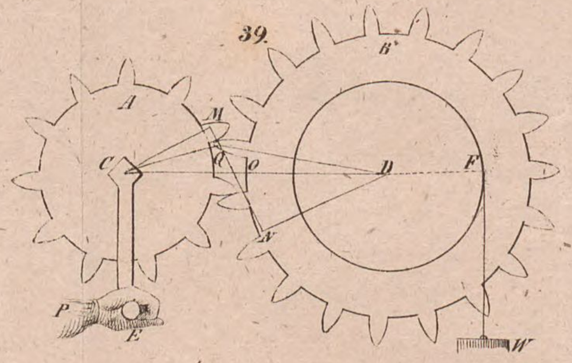
37.



38.

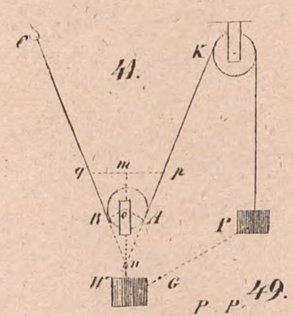


39.

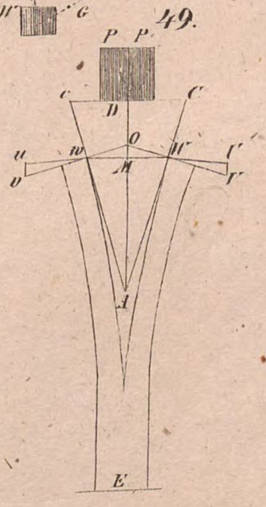


40.

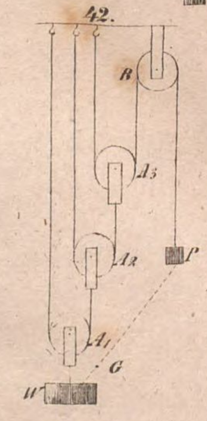
41.



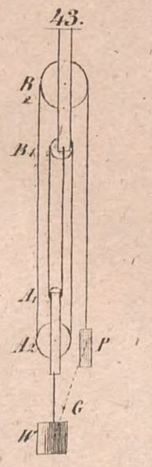
49.



42.

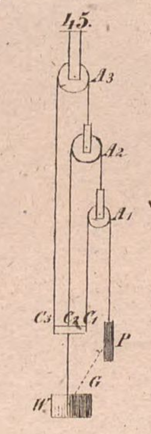


43.

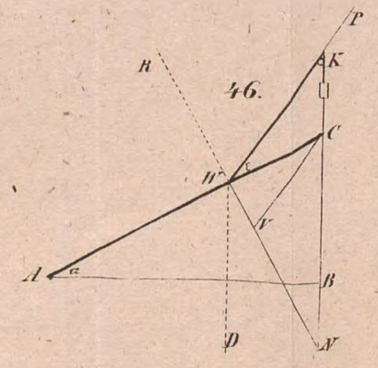


44.

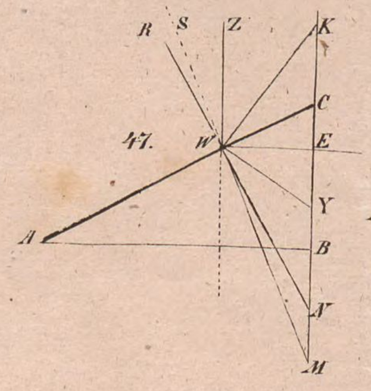
45.



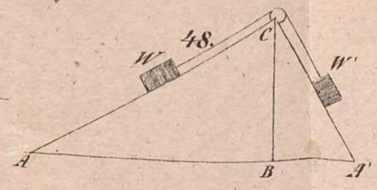
46.



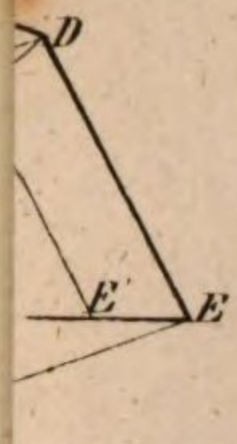
47.

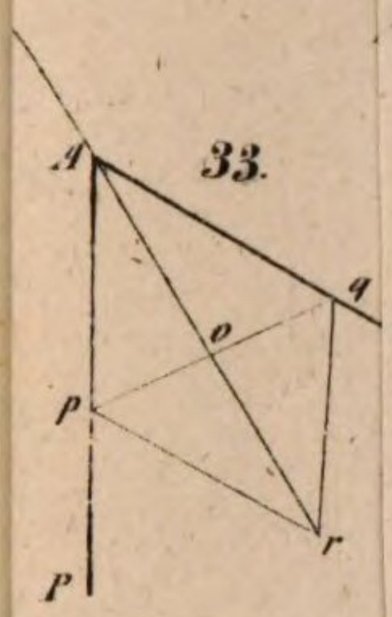


48.



Lith. v. Oehme & Müller in Braunschweig

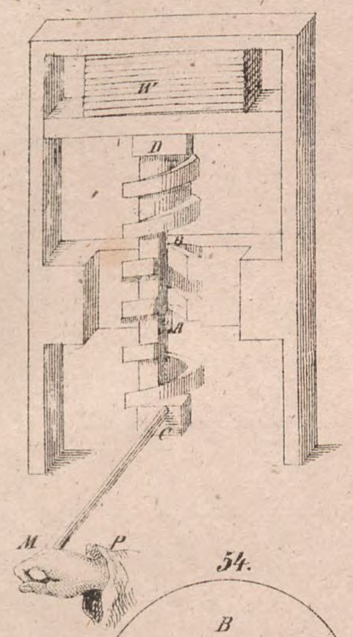

D
E'
E


A
33.
q
o
P
r
P

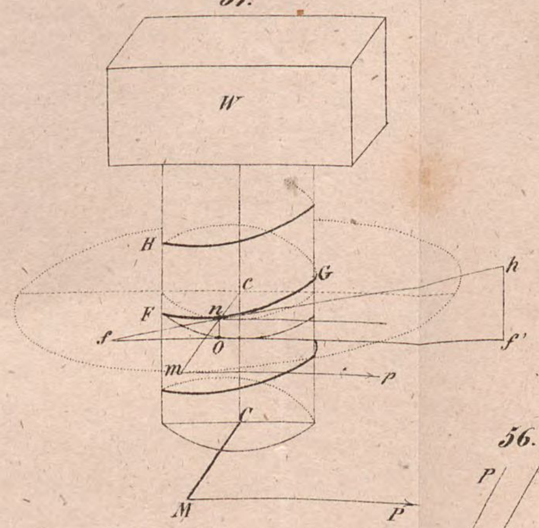
A
M
C
Q
o
E

P
K
C
B
A
N

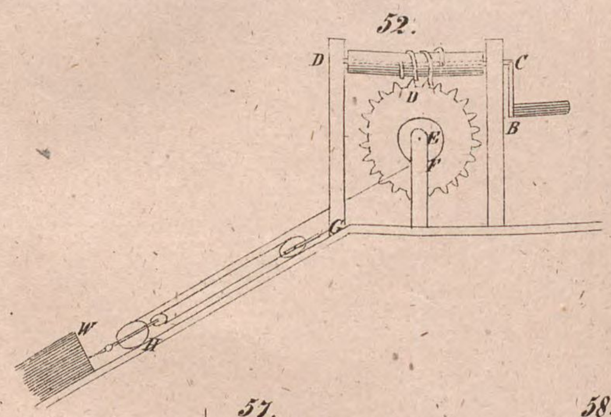
50.



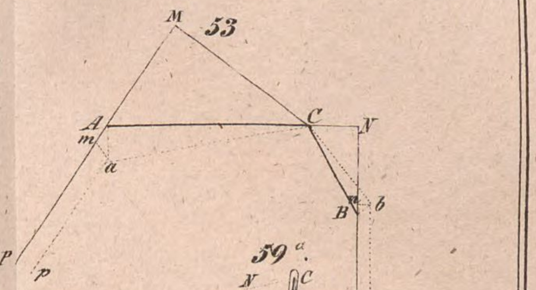
51.



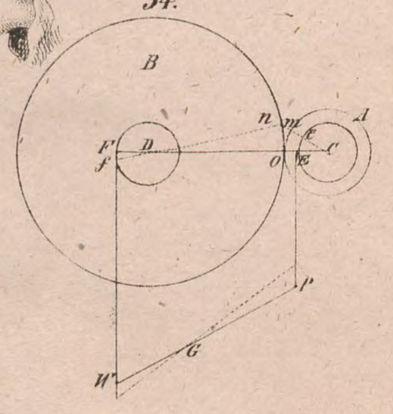
52.



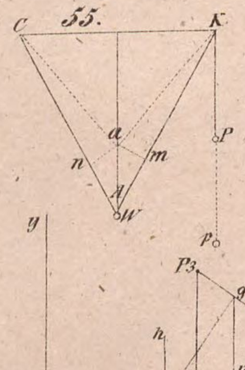
53.



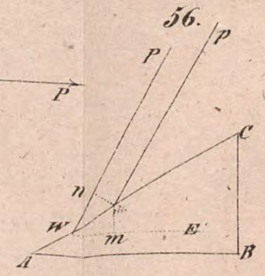
54.



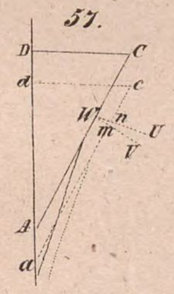
55.



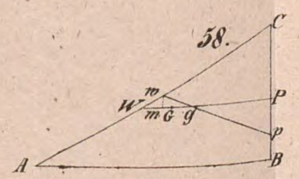
56.



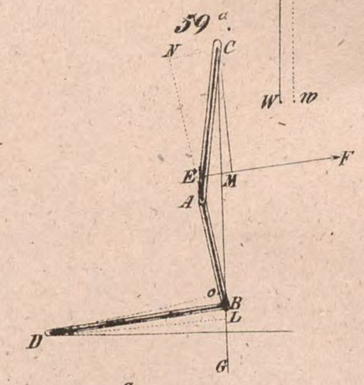
57.



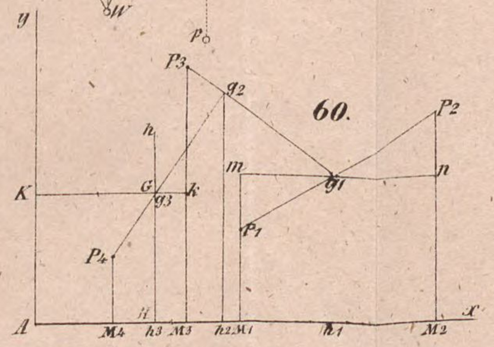
58.



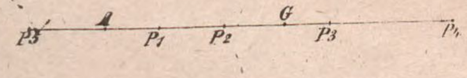
59.



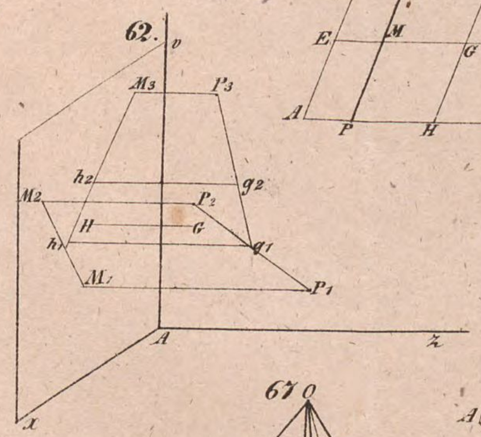
60.



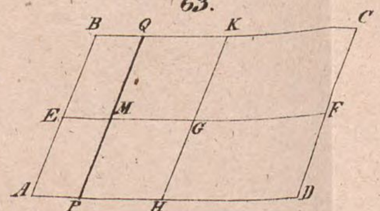
61.



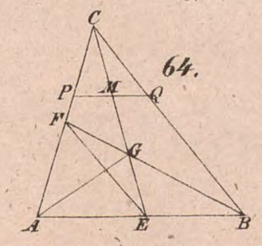
62.



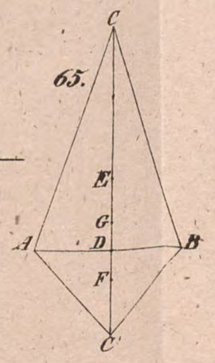
63.



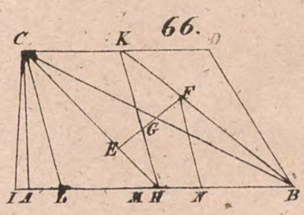
64.



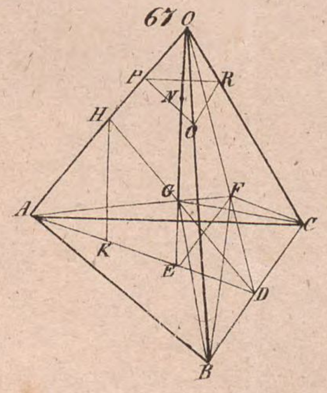
65.



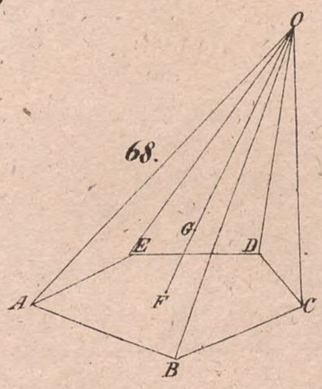
66.



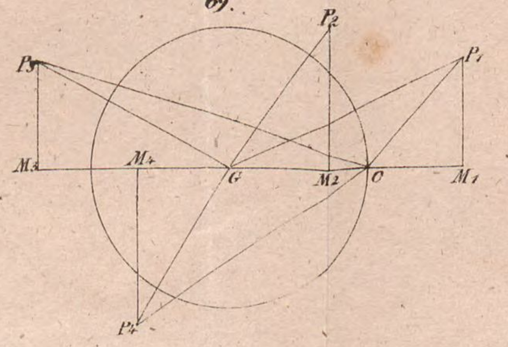
67.



68.

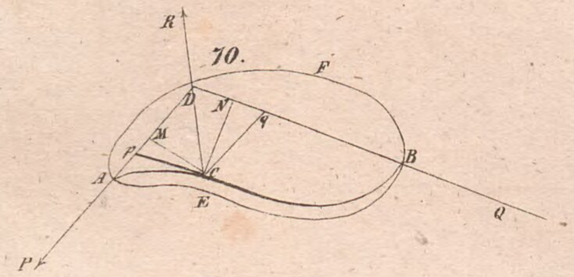


69.

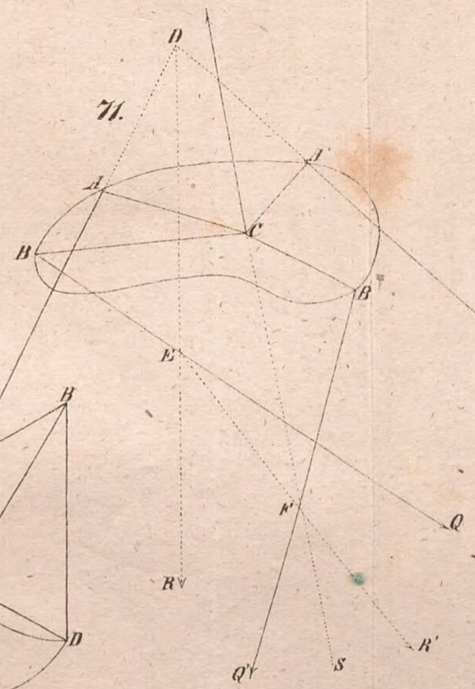


Lith. v. Böhme & Müller in Br.

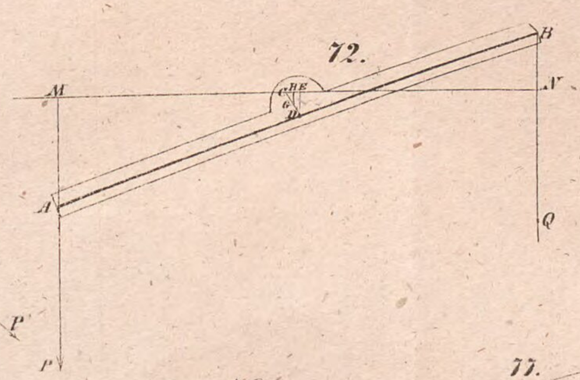
70.



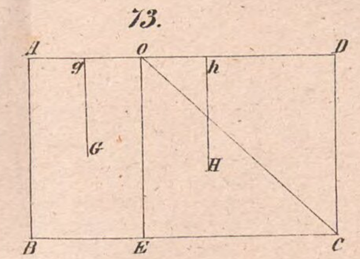
71.



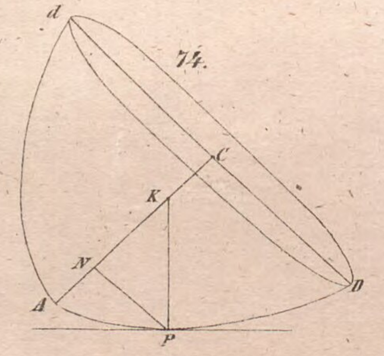
72.



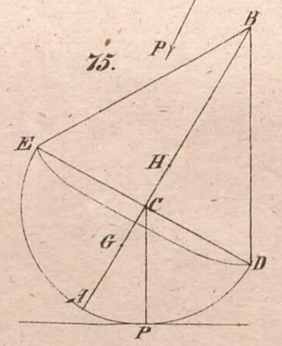
73.



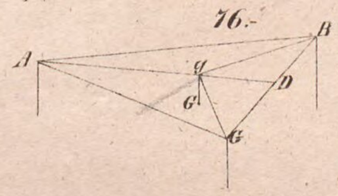
74.



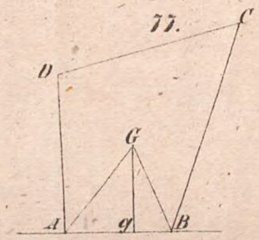
75.



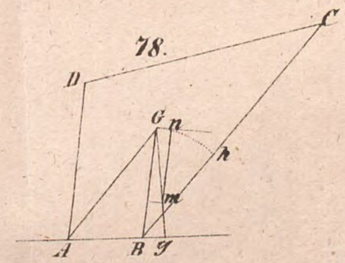
76.



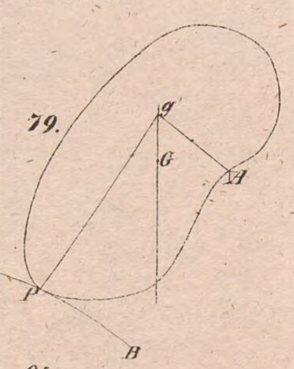
77.



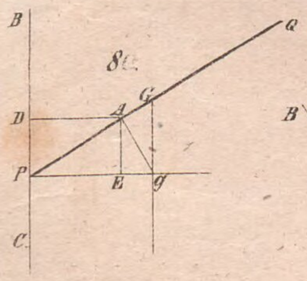
78.



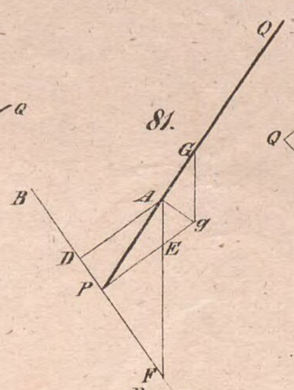
79.



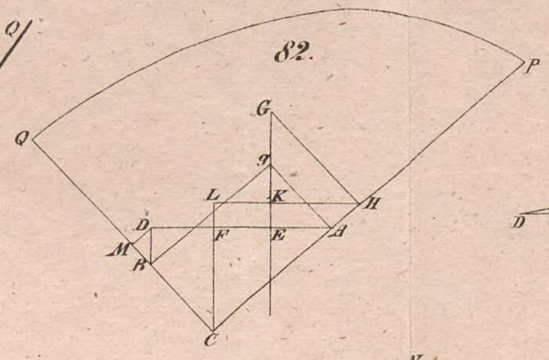
80.



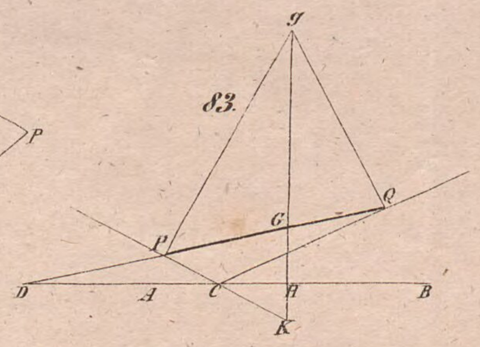
81.



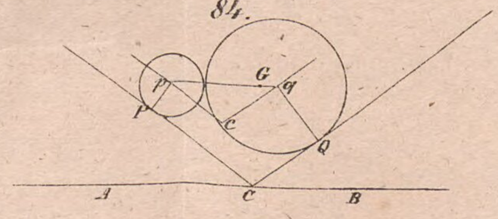
82.



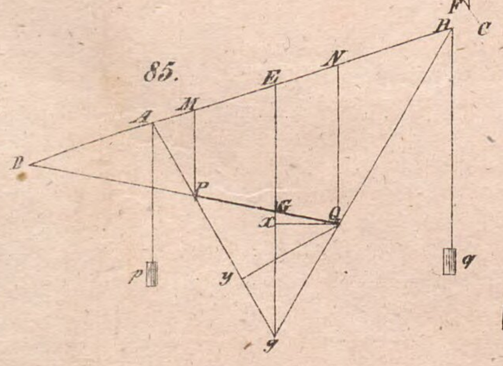
83.



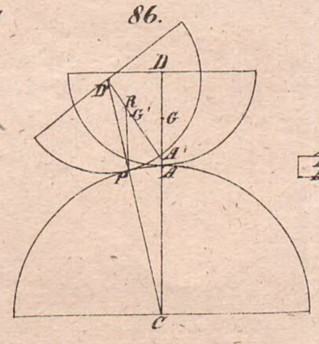
84.



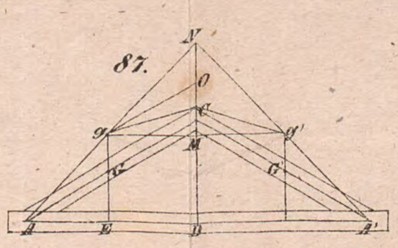
85.



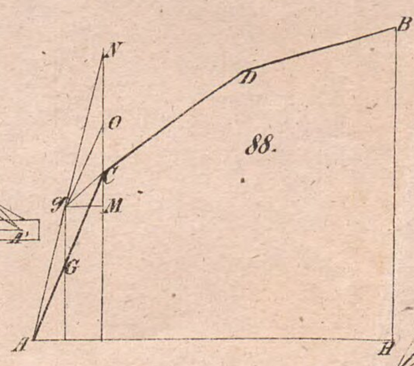
86.



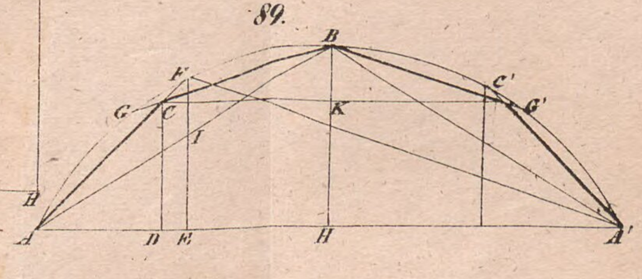
87.



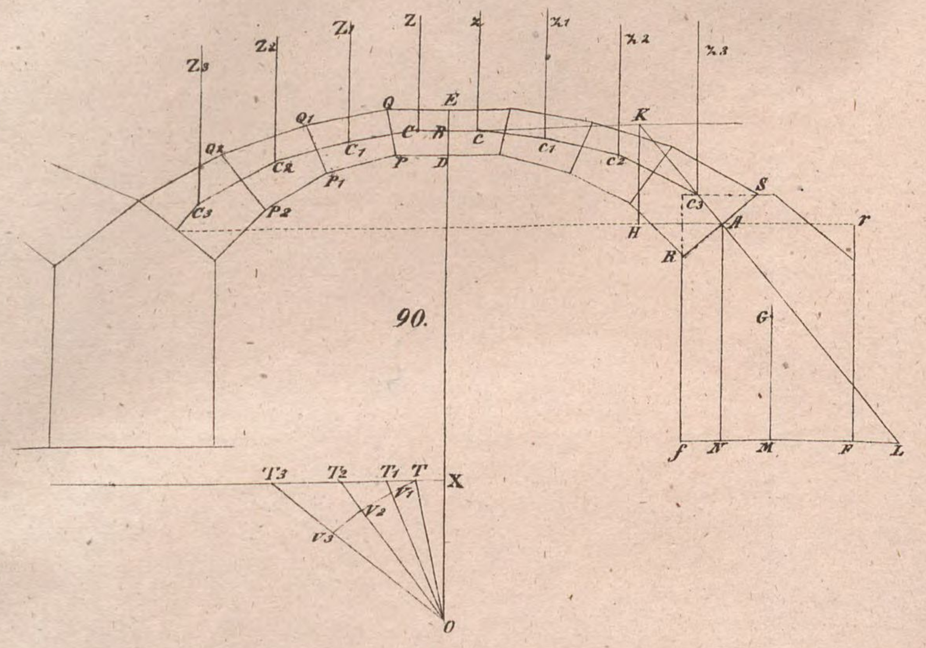
88.

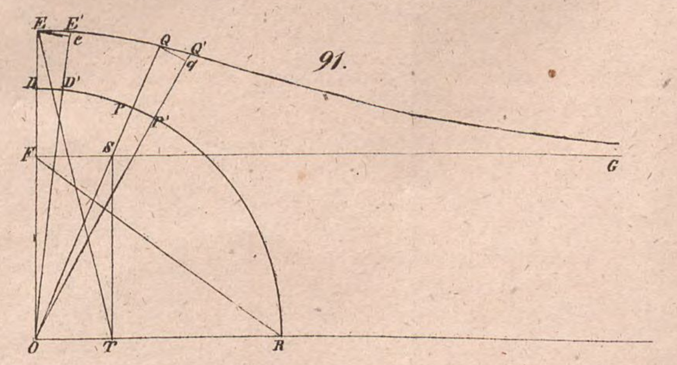


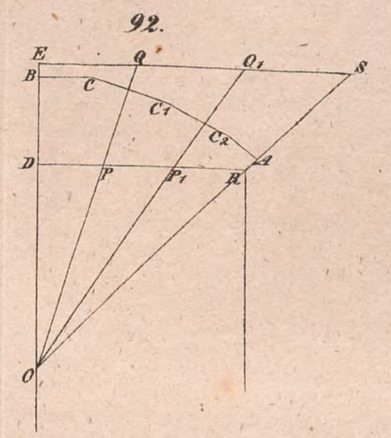
89.

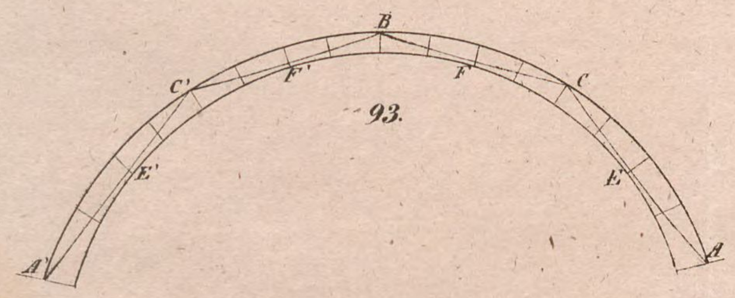


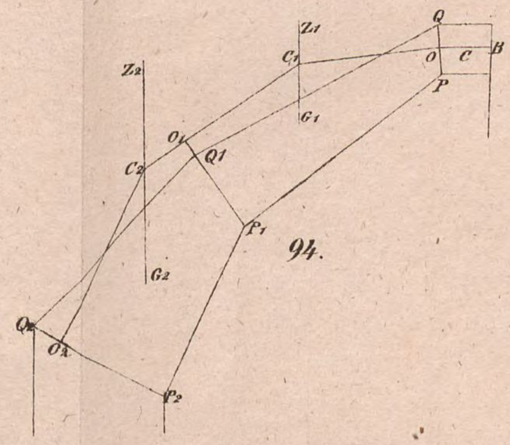
Lith. v. Palme & Müller in Breslau.

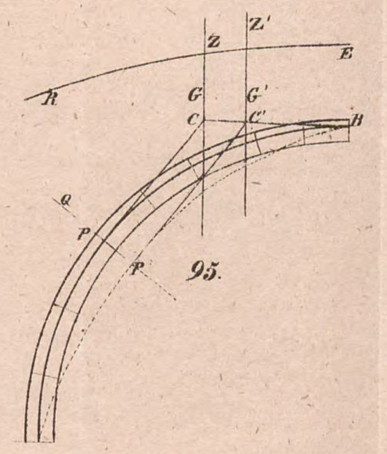


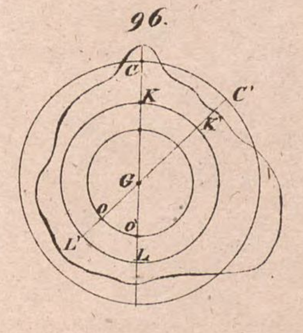


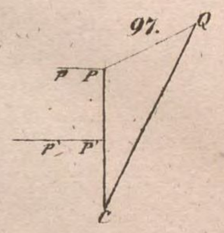


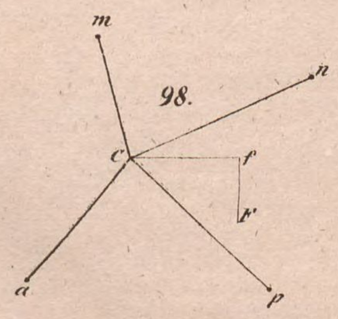


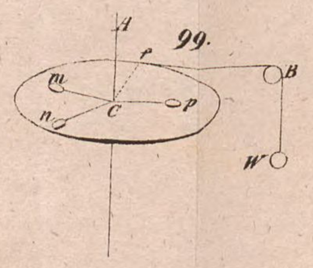


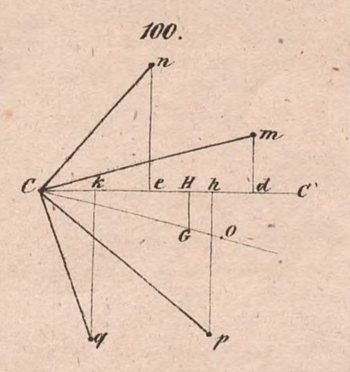


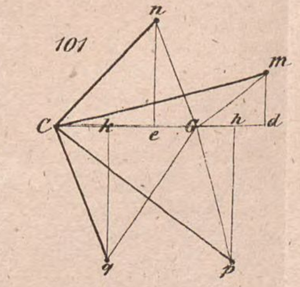


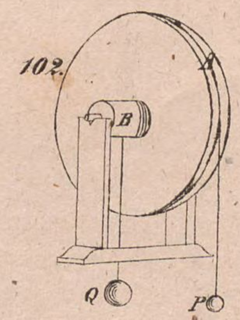






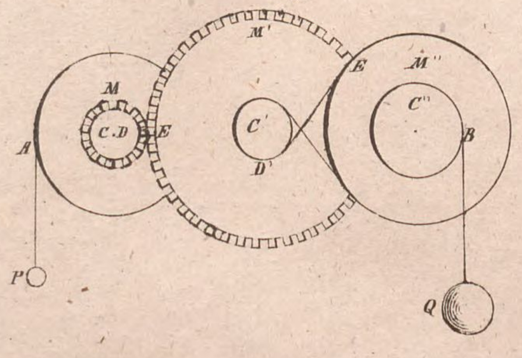




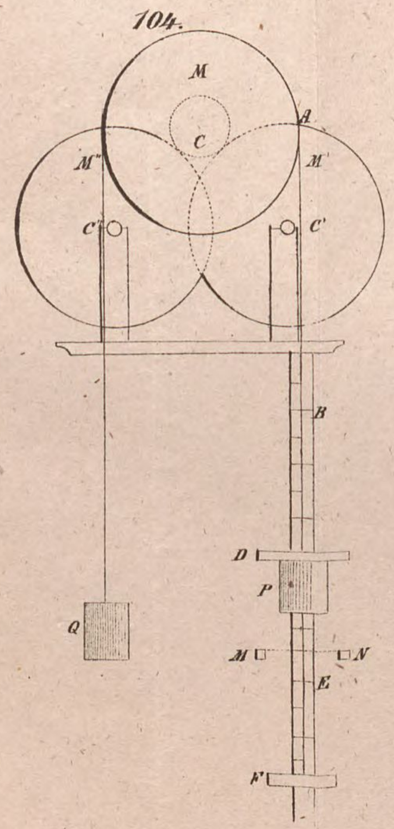


Lith. v. Oehme & Müller in Brschwg.

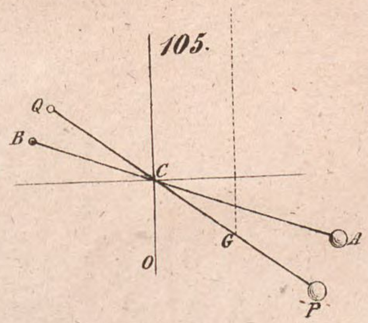
103.



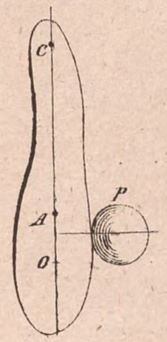
104.



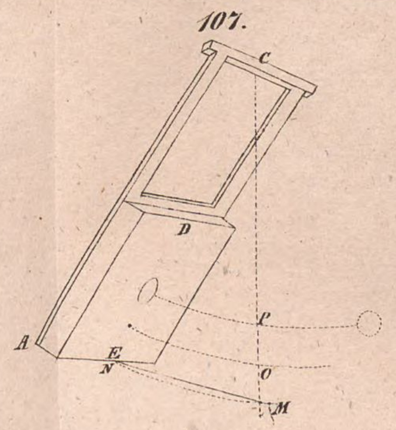
105.



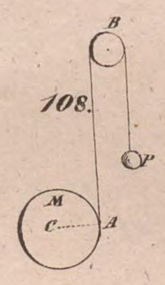
106.



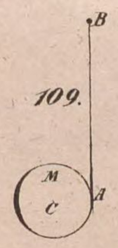
107.



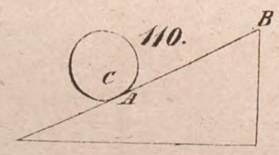
108.



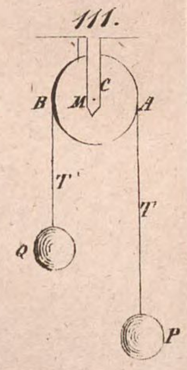
109.



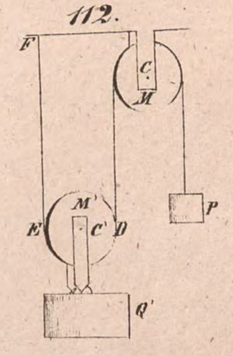
110.



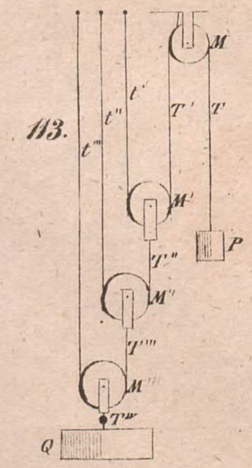
111.



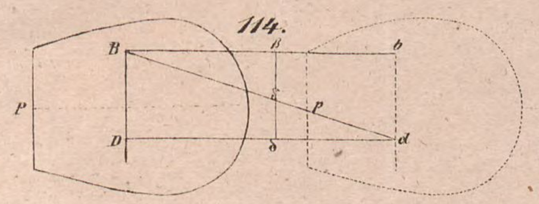
112.



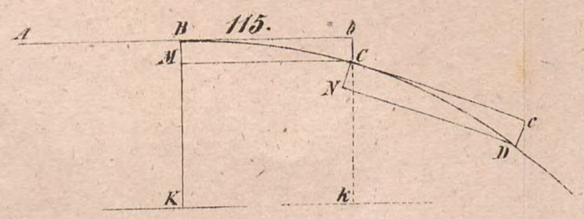
113.



114.

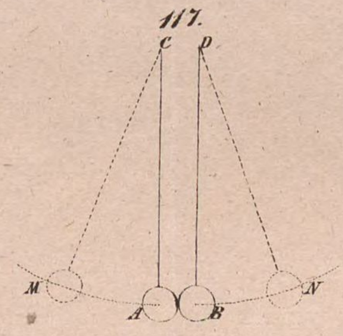


115.

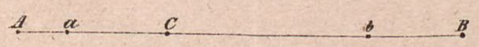


116.

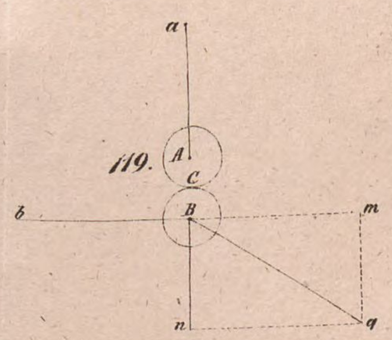
117.



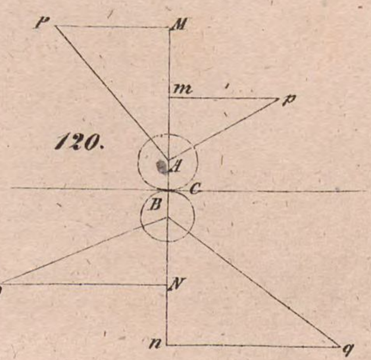
118.



119.

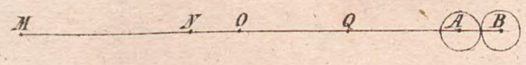


120.

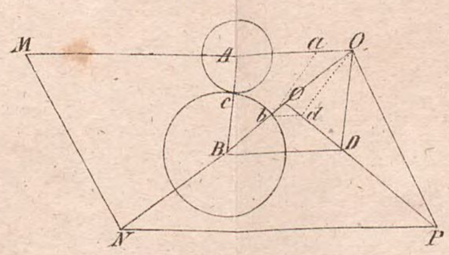


Lith. v. Oehme & Müller in Br.

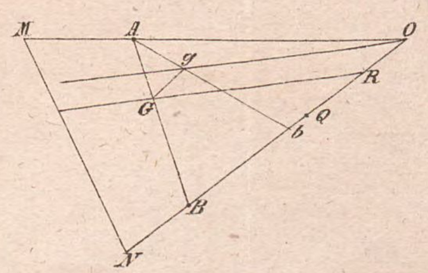
121.



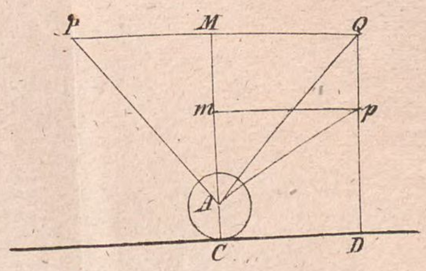
122.



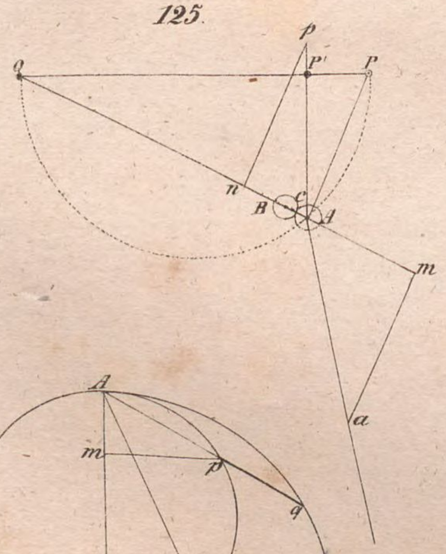
123.



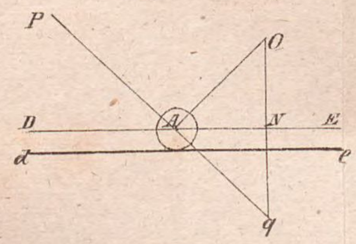
124



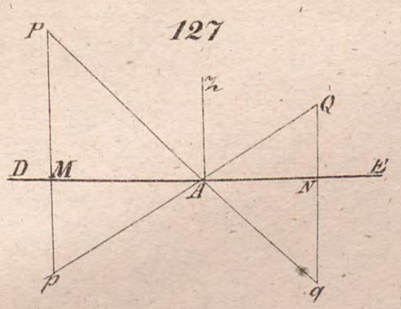
125.



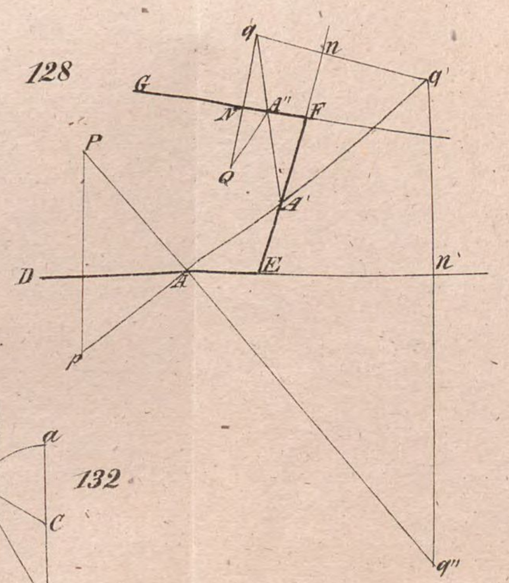
126



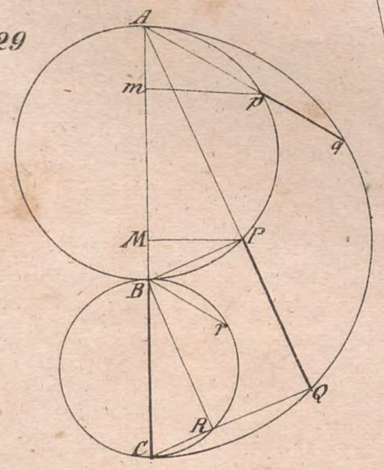
127



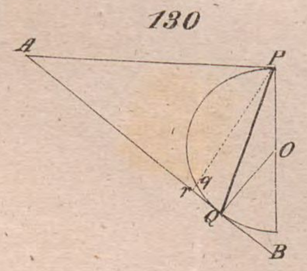
128



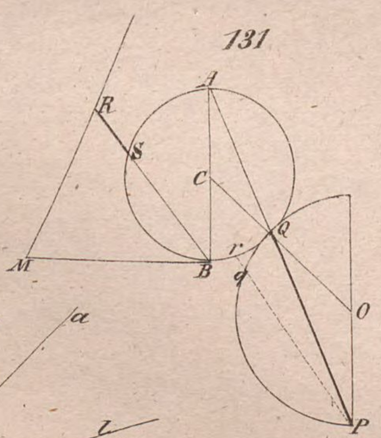
129



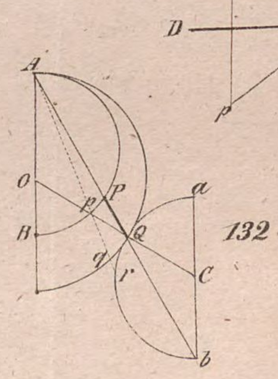
130



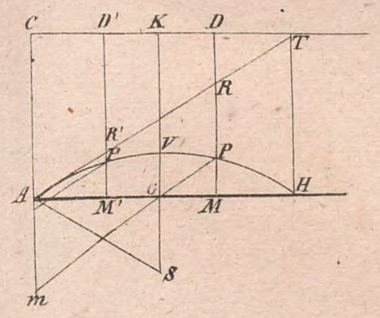
131



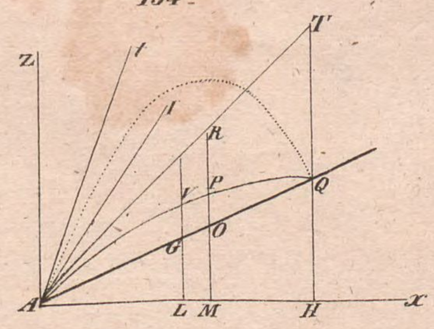
132



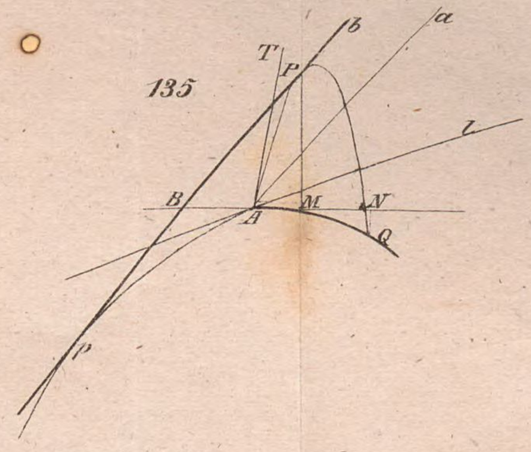
133



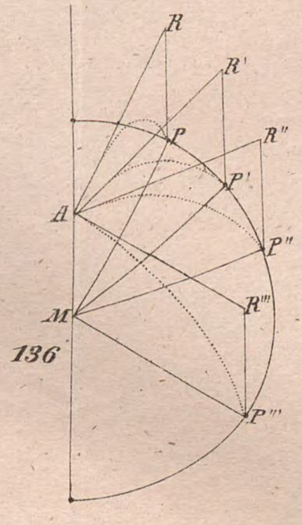
134.



135

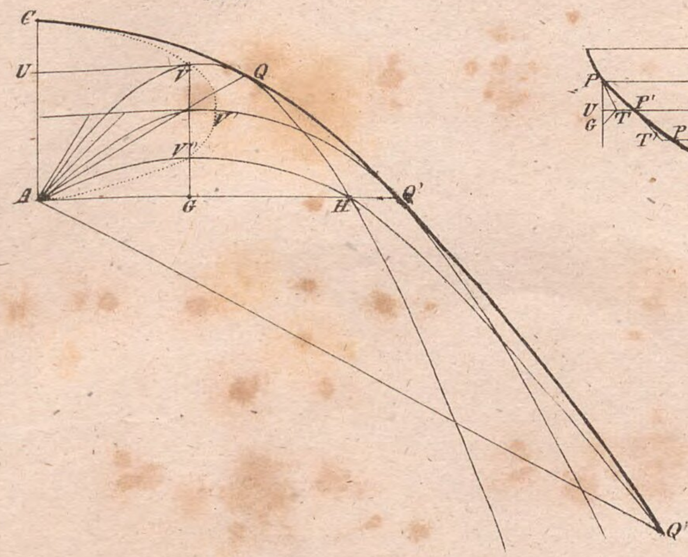


136

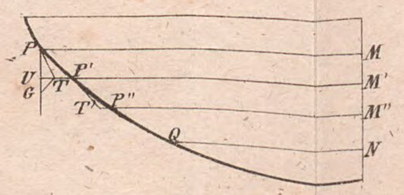


Lith. v. Oehme & Müller. in Br.

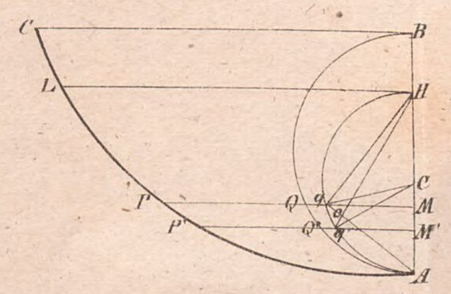
137.



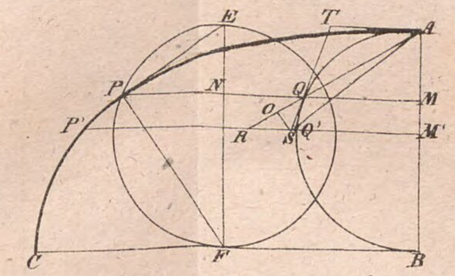
138.



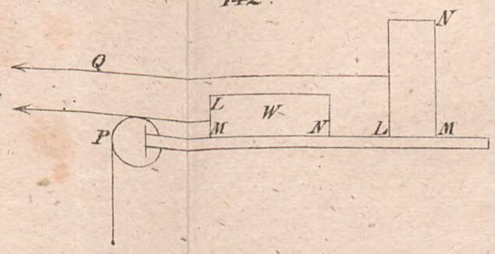
139.



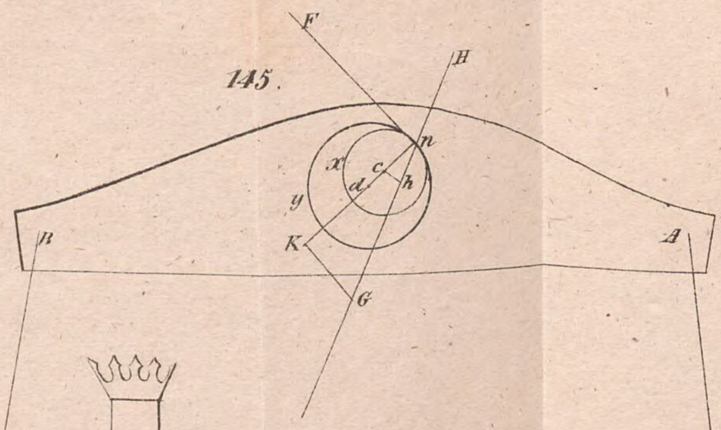
140.



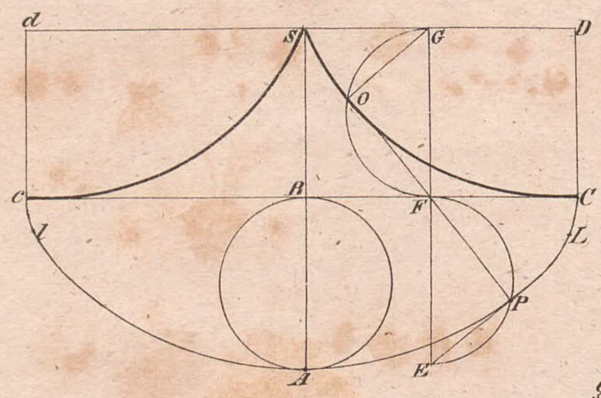
142.



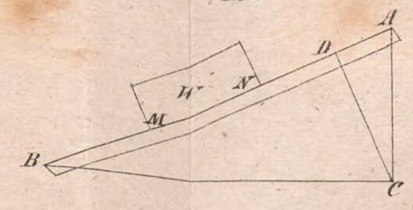
145.



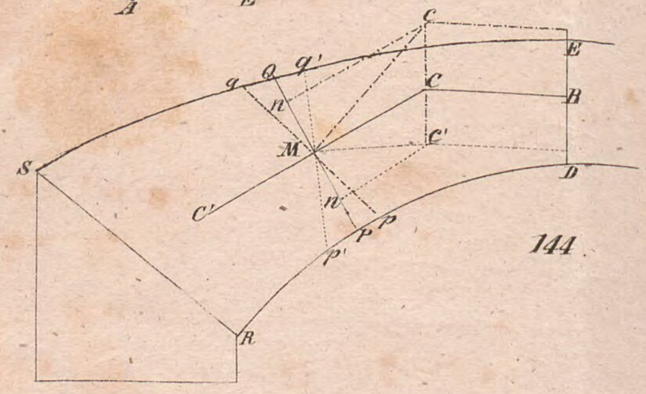
141.



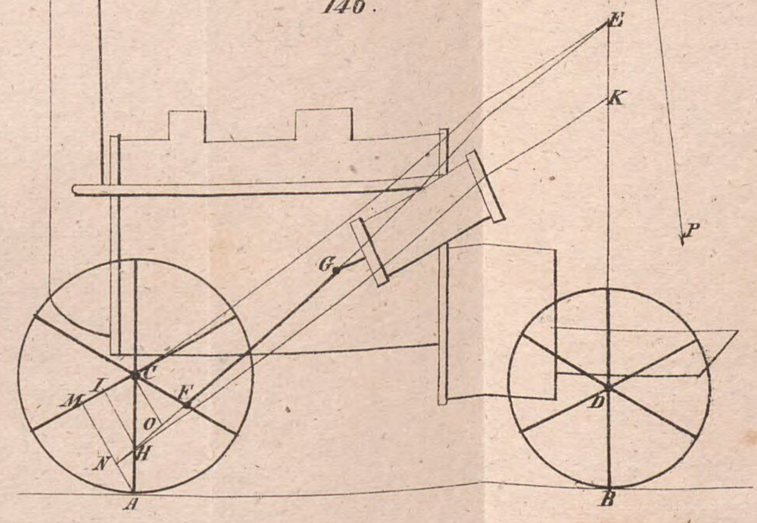
143.



144.



146.



Lith. v. Oehme & Müller in Br

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Whewell, William,

Elementar-Lehrbuch der Mechanik Nach der 5ten Originalauflage aus dem Engl. übers. von C. H. Schnuse

Braunschweig 1849

Math.a. 253 g
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081234-1